Exercices d'entraînement facultatifs

Exercice 72

Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une fraction irréductible.

$$F_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{11}{9} \qquad F_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{2}{15} \qquad F_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right)$$

$$F_4 = \left(-\frac{13}{20} - \left(\frac{12}{15} - \frac{3}{4}\right)\right) - \left(\frac{7}{20} + \left(\frac{9}{4} - \frac{15}{21}\right)\right) \qquad F_5 = \frac{7}{48} - \frac{5}{42} \qquad F_6 = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$F_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \qquad F_8 = \frac{1 + \frac{3}{32} + \frac{1}{3} \times \frac{15}{8}}{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}} \qquad F_9 = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{51}}{\frac{4}{9}}$$

Exercice 73

Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une unique fraction dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas eux-mêmes constitués de fractions. On développera et on réduira les numérateurs et les dénominateurs. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi les deux complexes a et b de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$F_1 = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{a+b} \qquad F_2 = \frac{b + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{b}} \qquad F_3 = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \qquad F_4 = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}$$

$$F_5 = \frac{\frac{a}{b} - 2}{\frac{b}{a} + \frac{1}{2}} \qquad F_6 = \frac{1}{a + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}} \qquad F_7 = 1 - \frac{1 - \frac{a}{a+b}}{\frac{a+b}{a} - 1}$$

Exercice 74

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3/2\}$, $\dfrac{2x}{3+2x} = \dfrac{? \times x}{x+?}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{3/4\}$, $\dfrac{3+4x}{3-4x} = ? \times \dfrac{x+?}{x+?}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{2x+1}{3x-3} = ? \times \dfrac{x+?}{x+?}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/3, 0\}$, $\dfrac{2x+1}{3x+1} = ? \times \dfrac{1 + \frac{?}{x}}{1 + \frac{?}{x}}$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{3/2\}$, $\dfrac{3x-1}{2x-3} = \dfrac{? \times (2x-3) + ?}{2x-3}$.

Exercice 75

Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une puissance de 10.

$$A_1 = \frac{10^{-2} \times 10^{-5}}{(10^3)^2} \qquad A_2 = \frac{\left((10^3)^{-2} \times (10^4)^3\right)^2}{(10^2)^5} \qquad A_3 = \frac{1000 \times 100^2}{(10^{-2})^{-3}} \qquad A_4 = \frac{(0.1 \times 10^3)^2 \times 100}{(100 \times 10^{-3})^3 \times 1000}$$

Exercice 76

Écrire chacun des nombres qui suit sous forme d'une fraction irréductible.

$$A_1 = \frac{(2^5)^3 \times 8^{-2}}{(4 \times 3)^3} \qquad A_2 = \frac{6^{-5} \times (12^3)^2}{9 \times 4^3} \qquad A_3 = \frac{(-5)^4 \times 10^{-5}}{(-2)^{-7}}$$

$$A_4 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{-3}{4}\right)^3 \qquad A_5 = \frac{10^{-5} \times (10^3)^7}{2^{-4} \times (2^5)^2}$$

Exercice 77

Soit m et n deux entiers, et a et b deux complexes. Trouver une écriture plus simple de chacun des nombres qui suit. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi les deux complexes a et b de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$A_1 = \frac{(a^n)^3 + (a^2)^n}{1 + a^n} \qquad A_2 = \frac{a}{b^{1-n}} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^n \times \left(\frac{a}{a-b}\right)^{n+1} \qquad A_3 = \frac{a^{m+n} \times (ab^n)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^m \times (ab^m)^n}$$

$$A_4 = (a^2)^n \times \frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^n}{(a + ab)^n}$$

Exercice 78

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$, $\dfrac{2}{(3x+2)^2} = \dfrac{?}{(x+?)^2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$, $\dfrac{2}{(3x+2)^2} = \dfrac{?}{(?x+1)^2}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(2x+1)^2}{(3x^2+1)^3} = ? \times \dfrac{(x+?)^2}{(x^2+?)^3}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + x^3)^3 = x^?(1+x)^?$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{1-2x}{3}\right)^3 = ? \times (x-?)^3$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\left(\dfrac{x-2}{x^2+2}\right)^3 = x^? \times \left(\dfrac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3$.

Exercice 79

Soit x, y et z trois complexes. Développer et réduire les expressions qui suivent.

$$A_1 = (2x-y)(x+2y) \qquad A_2 = (2x+1)(3-x)(x+2) \qquad A_3 = (x+2y)^2 - (2xy-1)^2 + 4x(x-2y)$$

$$A_4 = (x+y+z)^2 \qquad A_5 = (-x+y-1)(x-y-1) \qquad A_6 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{(1+2y)^2}{4} - (x-y)^2$$

Exercice 80

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $2x(? \times x - 1) + 3x(x-?) + x = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{2x+1}{x-1} = ? + \dfrac{?}{x-1}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1/2, -1\}$, $\dfrac{1}{(x+1)(2x-1)} = \dfrac{?}{x+1} + \dfrac{?}{2x-1}$.

Exercice 81

Dans chacune des questions qui suit, x, y et z sont des complexes. On ne demande pas d'effectuer des développements complets des expressions considérées. L'objectif est de ne déterminer que le terme demandé sans écrire le développement complet.

1. Déterminer le terme en x de $(2x-3)(4-x)$.
2. Déterminer le terme en x de $(2x+1)(x-3)(3x-1)$.
3. Déterminer le terme en x^3 de $(x+1)(x^2+2x+1)(4x^2+1)$.
4. En notant a un complexe, déterminer le terme en x^2 de $(2x-1)(3x^2+ax+1)$; il dépend évidemment de a.
5. Déterminer le terme en xyz de $(x+y+z)^3$

Exercice 82

Soit x un complexe. Mettre sous forme canonique les expressions qui suivent.

$$A_1 = x^2+4x+1 \qquad A_2 = 4x^2+5x-2 \qquad A_3 = 3-x-9x^2$$
$$A_4 = 2x^2-5 \qquad A_5 = 4x^2+x \qquad A_6 = 3x^2-6x-2$$

Exercice 83

Déterminer les points d'annulation de chacune des fonctions polynomiales de degré 2 qui suit.

$$f_1 : x \mapsto 2x^2+2x-3 \qquad f_2 : x \mapsto 4x^2+4x-3 \qquad f_3 : x \mapsto 2x^2-x-1$$
$$f_4 : x \mapsto 36x^2-1 \qquad f_5 : x \mapsto 3x^2+2x-1 \qquad f_6 : x \mapsto 2-x-6x^2$$

Exercice 84

Soit x et y deux complexes. Factoriser chacune des expressions qui suit.

$$A_1 = 4x-4-x^2 \qquad A_2 = 6x^3-x^2-9x^4$$
$$A_3 = 48yx^6-75yx^2 \qquad A_4 = 16(x+1)^2-25$$
$$A_5 = x^2-14x+49 \qquad A_6 = 4x^2y^4-4xy^2+1$$
$$A_7 = xy-x-y+1 \qquad A_8 = -10x^4-5x^3-25x^2$$
$$A_9 = 16(2x+1)^2-y^2+2y-1 \qquad A_{10} = y^2+x+y+xy$$
$$A_{11} = (x^2-9)(x+2)-9+(x+1)(x-3)+x^2 \qquad A_{12} = (4x^2-1)^2-(4x^2+4x+1)(x+1)^2$$
$$A_{13} = 9x^2+4y^2-12xy+9x-6y \qquad A_{14} = (x-y)^2+4xy-x-y$$
$$A_{15} = (5-2x)(3+4x)+6+8x-(4x+3)(2x-5)$$

Exercice 85

Soit x et y deux complexes. Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une unique fraction dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas eux-mêmes constitués de fractions et sont factorisés. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi les complexes x et y de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$F_1 = \frac{3}{2x+1} - \frac{1}{2x^2+7x+3} \qquad F_2 = \frac{(x-1)^2 + \dfrac{1-x}{1+x}}{x^2-4x+3} \qquad F_3 = \frac{x+1}{y+1} - \frac{y}{x}$$
$$F_4 = \frac{x-y}{x+y} - \frac{x-y}{2xy+x^2+y^2}$$

Exercice 86

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|2x-3| \leqslant 4$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|1-x| \geqslant 1$.

Exercice 87

Dans un repère orthonormé, tracer les graphes respectifs des applications

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2|x-1|-|x-2| \end{array}$$

Exercice 88

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel ou la racine carrée d'un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé. Les nombres placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in [-9/5\,;+\infty[$, $\sqrt{5x+9} = ?\sqrt{1+?x}$.
2. Pour tout réel x appartenant à $[-1/4\,;+\infty[$, $\sqrt{12x+3} = ?\sqrt{x+?}$.
3. Pour tout réel x appartenant à $]-3/4\,;+\infty[$, $\sqrt{\dfrac{2}{4x+3}} = \dfrac{?}{\sqrt{x+?}}$.
4. Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{x^3+2} = x^? \sqrt{x+\dfrac{2}{x^?}}$.
5. Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$.
6. Pour tout réel x appartenant à $]-1/2\,;0]$, $\sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$.

Exercice 89

Simplifier au plus l'écriture des réels qui suivent; en particulier aucune racine ne doit apparaître dans un dénominateur.

$$A = \sqrt{18}+\sqrt{8} \qquad B = \sqrt{45}-3\sqrt{20} \qquad C = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{2}-3$$

$$D = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{20}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-1}$$

Exercice 90

Soit x un réel strictement plus grand que 1. Donner une écriture plus simple des réels qui suivent.

$$A = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \qquad B = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x}-1} \qquad C = \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Exercice 91

1. Pour tout réel positif x, développer $(x-1)(x^2+x+1)$.
2. Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, déduire de la question précédente une écriture simplifiée du réel $A = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Exercice 92

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy = \dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$.

Exercice 93

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, $\dfrac{x^4-y^4}{x-y} = x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

Exercice 94

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x(2y - 3x) \leqslant \dfrac{y^2}{3}$.

Exercice 95

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + y \neq 0$, $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y} \geqslant xy$.

Exercice 96

1. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Développer et réduire $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{x + y}\right)^2$
2. Déduire de la première question que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{x + y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 97

Simplifier l'écriture des réels $A = \dfrac{\ln(4)}{2} + \ln(64) - 3\ln(2)$ et $B = \ln\left(\sqrt{\sqrt{17} + 4}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{17} - 4}\right)$.

Exercice 98

Soit x et y deux réels. Pour chacun des nombres qui suit, déterminer les contraintes que doivent vérifier x et y pour que le nombre considéré soit correctement défini et en simplifier l'écriture.

$$A_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{x+2y}}}{\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y} \qquad A_2 = \ln\left(\frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}\right) \qquad A_3 = \mathrm{e}^{3\ln(x)} \qquad A_4 = \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right)$$

Exercice 99

1. Déterminer l'ensemble D des réels x tels que $x^2 + x > 0$ et $3x^2 + 2x - 1 > 0$.
2. Pour tout $x \in D$ tel que $x > 0$, déterminer une écriture plus simple de $A = \ln(3x^2 + 2x - 1) + 2\ln(x) - \ln(x^2 + x)$.

Exercice 100

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;2]$, $1 \leqslant \dfrac{4x - 3}{2x - 1} \leqslant \dfrac{5}{3}$.
2. Déduire de la première question que pour tout $x \in [1\,;2]$, $0 \leqslant \ln(4x - 3) - \ln(2x - 1) \leqslant \ln(5) - \ln(3)$.

Exercice 101

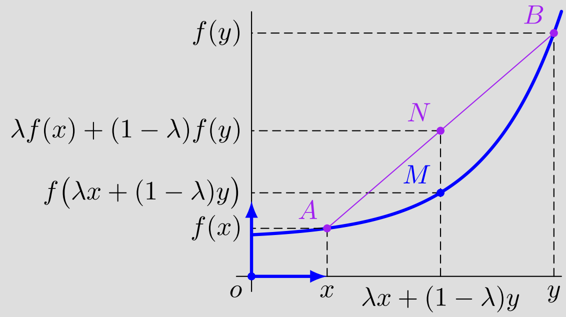
1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $x^2 + 2x \geqslant 3$.
2. Déduire de la première question que pour tout $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\left(\ln(x)\right)^2 + \ln(x^2) \geqslant 3$.

Exercice 102

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x + y}{2}$.
2. Déduire de la première question que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\dfrac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$.
3. Déduire de la première question que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}{2}$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si et seulement si pour tout $\lambda \in [0\,;1]$ et tout $(x, y) \in I^2$ vérifiant $x < y$,

$$(1) \; f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$



Géométriquement, cela signifie que dès que l'on fixe deux points A et B du graphe de f d'abscisse respective x et y, le segment $[A, B]$ est situé au dessus du graphe Γ de f. En effet, lorsque λ parcourt $[0\,;1]$, le point M de Γ d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ parcourt la partie de Γ comprise entre A et B tandis que le point N de Γ d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ et d'ordonnée $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ parcourt le segment $[A, B]$; étudier le schéma ci-contre précise cette assertion. Les fonctions $x \mapsto -\ln(x)$ et exponentielle sont convexes; les questions 2 et 3 de l'exercice précédent proposent une preuve de l'estimation (1) dans ces deux cas, lorsque $\lambda = 1/2$.

Exercice 103

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1 + 2f(x) + f(x)^2}{1 - f(x)^2} = \mathrm{e}^{2x}$.
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$.

Exercice 104

1. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer x^2, $-4x$ puis $x^2 - 4x + 3$.
2. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer $(x-2)^2$ puis trouver un nouvel encadrement de $x^2 - 4x + 3$.
3. Reprendre les deux questions lorsque x appartient à $[-4\,;-2]$ puis à $[-2\,;1]$.

Exercice 105

1. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer x et $x^2 + 1$ puis $\dfrac{x}{x^2+1}$.
2. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer $x + \dfrac{1}{x}$ puis trouver un nouvel encadrement de $\dfrac{x}{x^2+1}$.
3. Reprendre les deux questions lorsque x appartient à $[-4\,;-2]$.
4. Soit $x \in [-2\,;1]$. Encadrer au mieux $\dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 106

La présence du pictogramme «pingouin qui réfléchit» est liée à la seule transformation demandée dans la question 2, que l'on peut donc faire «de tête».

1. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer $2x+3$ et $4x-1$ puis $\dfrac{2x+3}{4x-1}$.
2. Soit $x \in [1\,;3]$. Écrire $\dfrac{2x+3}{4x-1}$ sous la forme $? + \dfrac{?}{4x-1}$. Proposer alors un autre encadrement de $\dfrac{2x+3}{4x-1}$.
3. Reprendre les deux questions lorsque x appartient à $[-4\,;-2]$.

Exercice 107

Soit $x \in [5\,;7]$. Déterminer un encadrement de $\ln(x-4) - \ln(2x+1)$.

Exercice 108

1. Soit $x \in [0\,;3]$. Donner un encadrement le plus précis possible des réels $|x-1|$ et $|x^2-1|$.
2. Reprendre la question précédente lorsque $x \in]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}[$.

Exercice 109

Dans chaque question de cet exercice, on considère deux réels dont on précise le classement et l'objectif est de classer des expressions construites à partir de ces réels comme dans les deux premiers exemples du cours. Lorsqu'il n'est pas possible de classer les réels en question, on peut chercher des hypothèses sur ces réels (placement des réels par rapport à 0 ou à un autre nombre explicitement connu) de telle sorte que le classement soit possible. On pourra encore une fois relire les deux exemples du cours dans lesquels on a dû préciser les positions des nombres manipulés par rapport à 0 pour pouvoir conclure... dans presque tous les cas.

1. Soit x et y deux réels distincts de 1 tels que $x \leqslant y$. Classer $\dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{1}{y-1}$.
2. Soit x et y deux réels tels que $x < 1 < y$. Classer $\big(\ln(x)\big)^{-3}$ et $\big(\ln(y)\big)^{-3}$, puis $\big(\ln(x)\big)^{2}$ et $\big(\ln(y)\big)^{2}$.

Exercice 110

Dans cet exercice, k désigne un entier relatif quelconque. Donner la valeur exacte de

$$A = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \qquad B = \cos\left(-\frac{39\pi}{4}\right) \qquad C = \sin\left(\frac{39\pi}{2} - \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{8\pi}{15} - \frac{11\pi}{5}\right) \qquad E = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{6}\right) \qquad F = 2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 7\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)$$

$$G = \cos\left(\frac{11\pi}{2} + 15\pi\right) \qquad H = \sin\left(-\frac{138\pi}{3}\right) \qquad I = \sin\left(\frac{38\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$J = \cos(k\pi) \qquad K = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \qquad L = \cos\left(\frac{39\pi}{4} + k\pi\right)$$

Exercice 111

Dans cet exercice, k désigne un entier relatif quelconque et α est un réel. En utilisant les formules (T2) à (T13), simplifier les expressions qui suivent. Chacune d'entre elle est de la forme $A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha)$ où A et B sont deux entiers relatifs.

$$A = \sin(13\pi - \alpha) \qquad B = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha) \qquad C = \sin(17\pi - \alpha) - \sin\left(-\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D = \cos\left(\alpha + \frac{11\pi}{2}\right) \qquad E = \sin(-\pi + \alpha) + \cos(-\pi + \alpha) \qquad F = \sin(12\pi + \alpha) - 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$G = \sin\left(\pi - \frac{9\pi}{2} - \alpha\right) \qquad H = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(-\alpha) \qquad I = \sin(7\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$J = \cos(\alpha + k\pi) \qquad K = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - k\pi\right)$$

Exercice 112

Dans cet exercice, x est désigne un réel. En utilisant les formules (T14) à (T17), écrire chacune des expressions qui suit sous la forme $A\sin(x) + B\cos(x)$ où A et B sont deux réels.

$$A = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad B = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + \cos\left(x - \frac{27\pi}{4}\right) \qquad C = \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \times \cos\left(-x + \frac{51\pi}{4}\right)$$

$$D = \cos\left(7\pi - x + \frac{4\pi}{3}\right) \qquad E = \sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{3} + x\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(x - \frac{23\pi}{6}\right)$$

Exercice 113

Soit x un réel. Écrire chacune des expressions qui suit sous la forme d'une **expression polynomiale** développée en $\sin(x)$.

$$A = 2\big(\sin(x)\big)^3 - \sin(x)\big(\cos(x)\big)^2 \qquad B = \big(\cos(x)\big)^4 + 3\big(\sin(x)\big)^2 \qquad C = \big(\cos(x)\big)^4 + \big(\sin(x)\big)^4 - 2\big(\cos(x)\big)^2$$

Exercice 114

Soit x et y deux réels.

1. En utilisant les formules (T14) et (T15), réécrire les réels $\cos\left(\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}\right)$.
2. Écrire l'expression $\cos(x) + \cos(y)$ sous la forme du produit de deux cosinus et d'un entier explicitement connu.

Exercice 115

1. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-7\pi\,;-5\pi]$ tels que $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$.
2. Déterminer tous les réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $\sin(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-\pi\,;2\pi]$ tels que $\cos(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Déterminer tous les réels t appartenant à $[11\pi\,;12\pi]$ tels que $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$.
5. Déterminer tous les réels t appartenant à $[\pi\,;2\pi]$ tels que $\cos(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-\pi/2\,;\pi/2]$ tels que $\sin(t) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
7. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-6\pi\,;-2\pi]$ tels que $\cos(t) \geqslant 0$.
8. Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;5\pi]$ tels que $\cos(t) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
9. Déterminer tous les réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $\big|\sin(t)\big| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
10. Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
11. Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;\pi]$ tels que $\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 116

Donner la forme algébrique de chacun des complexes qui suit.

$$z_1 = (3\mathrm{i}+4)(\mathrm{i}-8) \qquad z_2 = (-\mathrm{i}+4)(-2\mathrm{i}-3) \qquad z_3 = (2\mathrm{i}+1)^3 \qquad z_4 = (3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})^2$$

$$z_5 = (-1-2\mathrm{i})^2 \qquad z_6 = \frac{2\mathrm{i}-1}{2\mathrm{i}-3} \qquad z_7 = \frac{1-4\mathrm{i}}{(5+\mathrm{i})(3-6\mathrm{i})} \qquad z_8 = \frac{(3-2\mathrm{i})^2}{(2-2\mathrm{i})^2}$$

$$z_9 = (\sqrt{3}+2\mathrm{i})^3 \qquad z_{10} = (4+\mathrm{i})^2 - (-\mathrm{i}+1)^2 \qquad z_{11} = 12\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 \qquad z_{12} = 4\mathrm{i} - \frac{-\mathrm{i}+1}{-2\mathrm{i}+3}$$

$$z_{13} = \frac{(1+\mathrm{i})^{20}}{(1-\mathrm{i})^{19}} \qquad z_{14} = \frac{2}{\mathrm{i}+3} - \frac{4\mathrm{i}}{(\mathrm{i}+3)^2} \qquad z_{15} = -\mathrm{i}\big((\mathrm{i}+2)^2 - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)\big) \qquad z_{16} = \frac{3+\mathrm{i}}{(3+6\mathrm{i})^3}$$

Exercice 117

1. Déterminer la forme algébrique des complexes z tels que $-\mathrm{i}z+4=-2\mathrm{i}$.
2. Déterminer la forme algébrique des complexes z tels que $(3-\mathrm{i})z+7=-2+4\mathrm{i}z$.
3. Déterminer la forme algébrique des complexes z tels que $(3-\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})+7=-2+4\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(z+1)$.
4. Déterminer la forme algébrique des complexes z distincts de $4\mathrm{i}$ tels que $\dfrac{(3-\mathrm{i})z+7}{4+\mathrm{i}z}=2-\mathrm{i}$.

Exercice 118

Soit t un réel. On pose $z=t+1-it$. Écrire sous forme algébrique les nombres qui suivent; dans chaque calcul, on déterminera puis on écartera les valeurs de t pour lesquelles le calcul considéré n'a aucun sens.

$$z_1=\frac{1}{z-\mathrm{i}},\quad z_2=\overline{z}^2,\quad z_3=\frac{z}{\overline{z}}\quad\text{et}\quad z_4=\frac{1}{(2+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-8}$$

Exercice 119

Dans cet exercice, t désigne un réel. Pour chaque complexe qui suit, trouver les valeurs de t pour lesquelles le complexe considéré est réel; dans chaque calcul, on déterminera puis on écartera les valeurs de t pour lesquelles le calcul considéré n'a aucun sens.

$$z_1=\mathrm{i}(t+1)(\mathrm{i}+t)-(t+2\mathrm{i})\qquad z_2=(t-1)^3(1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})(t-3)^2-2(t-2)(t+2)(3-\mathrm{i})\qquad z_3=\frac{t+1-\mathrm{i}}{t+1+\mathrm{i}}$$

$$z_4=(1+2\mathrm{i})\sin(t)-(\mathrm{i}-1)\qquad z_5=\big((t+1)^2+2t(2t-1)\mathrm{i}\big)^2\qquad z_6=\frac{2\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}(\mathrm{i}t+1)^2+2}$$

Exercice 120

Tracer un cercle trigonométrique, y placer les images des complexes qui suivent et donner leur écriture algébrique.

$$z_1=\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4}\qquad z_2=\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6}\qquad z_3=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2}\qquad z_4=\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi}$$

$$z_5=\mathrm{e}^{47\mathrm{i}\pi/3}\qquad z_6=\mathrm{e}^{-23\mathrm{i}\pi/4}\qquad z_7=\mathrm{e}^{-11\mathrm{i}\pi}$$

Exercice 121

Donner la forme trigonométrique des complexes qui suivent.

$$z_1=-4\qquad z_2=2\mathrm{i}\qquad z_3=1-\mathrm{i}\qquad z_4=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{3}$$

$$z_5=-2-2\mathrm{i}\qquad z_6=\sqrt{3}+3\mathrm{i}\qquad z_7=\sqrt{8}+\frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\qquad z_8=-\sqrt{6}+3\mathrm{i}\sqrt{2}$$

Exercice 122

Donner la forme trigonométrique des complexes qui suivent.

$$z_1=(3+4\mathrm{i})(3+\mathrm{i})^2\qquad z_2=(2+3\mathrm{i})^3\left(1-\frac{\mathrm{i}}{5}\right)^3\qquad z_3=(\sqrt{3}-\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$z_4=\mathrm{i}(3-3\mathrm{i})^3\qquad z_5=\frac{\big(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}{\big(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}\qquad z_6=\frac{\big(5+11\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}{\big(7-4\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}$$

Exercice 123

Donner la forme algébrique chacun des complexes qui suivent.

$$z_1=3+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\qquad z_2=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}+\mathrm{i}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}-\mathrm{i}}\qquad z_3=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9}\big)^6$$

$$z_4=\frac{2+2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}\times\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}}\qquad z_5=(2+2\mathrm{i})^4(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5\qquad z_6=(1-3\mathrm{i})^7(2-\mathrm{i})^{-6}$$

Exercice 124

Soit x un réel. Mettre sous forme trigonométrique le complexe $z = \left(1 + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right) \times \dfrac{\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)}{\cos(x) - \mathrm{i}\,\sin(x)}$.

Exercice 125

Donner la forme algébrique du complexe $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Exercice 126

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, exprimer $|x+y|^2$ sous la forme d'une **expression algébrique** en x, y et leur conjugué.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Re}\left(x\,\overline{y}\right) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$.

Exercice 127

Soit n, m deux entiers naturels et a un complexe. Donner une expression sans symbole de sommation de

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n+1} (ak+n) \qquad S_2 = \sum_{k=n}^{2n} ak + n, \qquad S_3 = \sum_{k=m}^{n+m-1} \frac{k+1}{2} \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n} 3k - 9 + \sum_{k=0}^{n} (k-1)$$

Les résultats devront être mise sous la forme d'une fraction dont le numérateur est une expression polynomiale en n entièrement factorisée et le dénominateur est un entier numériquement connu.

Exercice 128

Soit n un entier naturel et x, y et z trois réels. On suppose que y est non nul dans les sommes S_2, S_6 et S_8, et que ce réel est strictement positif dans S_9. Donner une expression sans symbole de sommation des sommes qui suivent; on prendra garde à bien distinguer plusieurs cas lors de l'usage de la formule (S5) du cours sur les sommes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{7 \times x^{k+1}}{3 \times 2^k}, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{y^{2nk}}, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{2n} x^k y^{k+1} z^{k+2} \qquad S_4 = \sum_{k=n}^{2n} \left(x^k + y^k\right)$$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k + y^k\right)^2 \qquad S_6 = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{x}{y^k}\right)^3, \qquad S_7 = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{(2k+1)x}\right)^n, \qquad S_8 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{3k+2}+1}{2y^k}$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(3y^k\right), \qquad S_{10} = \sum_{k=-n}^{n} 3(x^k + k)$$

Exercice 129

1. Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des complexes. Exprimer sans symbole de sommation le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_k - a_{k-1}\right)$.
2. Pour tout entier naturel non nul k, simplifier l'expression $2^k - 2^{k-1}$. En déduire, sans utiliser la formule (S5) de la leçon sur les sommes, une expression sans symbole de sommation du réel
$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$
3. En exploitant la première question, donner une expression sans symbole de sommation de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Exercice 130

Donner l'expression explicite de la dérivée de chacune des fonctions qui suit.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (3x^2+1)\cos(2x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x+3} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x\mathrm{e}^x\right)^2 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc}]-\pi/2\,;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{x+1} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x+1} \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln\left(\sqrt{x}\right) \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(2x+1)^4} \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array}$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc}]0\,;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\sin(2x)} \end{array} \qquad f_{11} : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+2x}{1-x^2} \end{array} \qquad f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \end{array}$$

$$f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x^2+1} \end{array} \qquad f_{14} : \begin{array}{ccc}]-1/2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\sqrt{2x+1}\right) \end{array} \qquad f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} \end{array}$$

$$f_{16} : \begin{array}{ccc}]-\pi\,;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3\sin(x)}{\cos(x)+1} \end{array} \qquad f_{17} : \begin{array}{ccc}]-\pi/2\,;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\left(\sin(x)\right)^2}{\left(\cos(x)\right)^2} \end{array} \qquad f_{18} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

Exercice 131

Donner l'expression explicite d'une primitive de chacune des fonctions qui suit. Il sera nécessaire de transformer l'écriture de certaines fonctions pour faire apparaître des modèles connus de primitives.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (2x+1)^3 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(3x-1)}{2} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc}]1/4\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-4x} \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2x^3} \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\mathrm{e}^x\right)^3 \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^2}{1-x^3} \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc}]2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{3\sqrt{2x-4}} \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc}]-1/3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{3x+1} \end{array}$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4x}{(x^2+1)^3} \end{array} \qquad f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} \end{array} \qquad f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 \end{array}$$

$$f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad f_{14} : \begin{array}{ccc}]-3/2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(2x+3)^2} \end{array} \qquad f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+1} \end{array}$$

$$f_{16} : \begin{array}{ccc}]-2/3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+3}{3x+2} \end{array} \qquad f_{17} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\exp\left(3x^2\right) \end{array} \qquad f_{18} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x+1\right)^4 \end{array}$$

$$f_{19} : \begin{array}{ccc}]0\,;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\left(\cos(x)\right)^2-1}{\sqrt{\sin(2x)}} \end{array} \qquad f_{20} : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4}{x^2-1} \end{array} \qquad f_{21} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\sin(x)\right)^2 \end{array}$$

Exercice 132

1. Déterminer la dérivée de $x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer la dérivée de $x \mapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0\,;\pi[$. En déduire une primitive de $x \mapsto \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2$ sur $]0\,;\pi[$.

Exercices de recherche facultatifs

Exercice 133

Soit x un rationnel appartenant à $]0\,;1[$. On appelle n_1 le plus petit entier naturel non nul tel que $x - \dfrac{1}{n_1} \geqslant 0$.
Si $x - \dfrac{1}{n_1} > 0$, on appelle n_2 le plus petit entier naturel non nul tel que $x - \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2} \geqslant 0$.
Si $x - \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2} > 0$, on appelle n_3 le plus petit entier naturel non nul tel que $x - \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2} - \dfrac{1}{n_3} \geqslant 0$...
On réitère le processus jusqu'à ce que ce soit impossible. Par exemple pour $x = \dfrac{7}{11}$, on note successivement que

$\dfrac{7}{11} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{22}$ donc $n_1 = 2$

puis $\dfrac{3}{22} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{88}$ et $\dfrac{3}{22} - \dfrac{1}{7} < 0$ donc $n_2 = 8$

puis $\dfrac{1}{88} - \dfrac{1}{88} = 0$ et $\dfrac{1}{88} - \dfrac{1}{87} < 0$ donc $n_3 = 88$

et le processus s'arrête. On sait alors que $\dfrac{7}{11} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{88}$.

1. Appliquer l'algorithme à $\dfrac{9}{13}$
2. Appliquer l'algorithme à $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}$
3. En s'aidant d'une machine, appliquer l'algorithme à $\dfrac{15}{61}$

L'écriture d'un rationnel comme somme de rationnels deux à deux distincts dont les numérateurs valent 1 s'appelle un développement égyptien du rationnel; on pourra consulter https://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_égyptienne. On peut montrer que tout rationnel admet un développement égyptien mais que ce dernier n'est en général pas unique. L'algorithme précédent permet de construire effectivement un tel développement. Notons que le même algorithme s'applique aux réels x appartenant à $]0\,;1[$, mais conduit à construire une suite infinie $(n_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de dénominateurs. On peut alors montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant x - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_p}\right) \leqslant \frac{1}{n_p(n_p-1)}$$

ce qui permet de trouver de bonnes approximations rationnelles de réels. Par exemple

- $0 \leqslant \pi - 3 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{61} \leqslant \dfrac{1}{3660}$ donc $\dfrac{1533}{488}$ approche π par défaut avec une précision meilleure que 3×10^{-4}.
- $0 \leqslant \pi - 3 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{61} - \dfrac{1}{5020} \leqslant \dfrac{1}{25195380}$ donc $\dfrac{1924037}{612440}$ approche π par défaut avec une précision meilleure que 4×10^{-8}.

Exercice 134

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 6}{u_n + 1}$.

1. Vérifier que les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.
2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** et en déterminer la raison.
3. Déterminer l'expression explicite des termes de la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

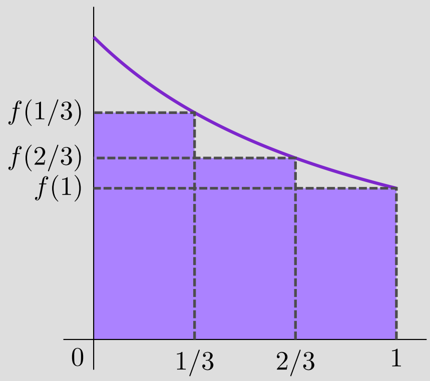
Exercice 135

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, écrivez le réel $u_{n+1} - u_n$ sous la forme d'une fraction. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de termes dans la somme définissant u_n? Quel est le plus grand d'entre eux? En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
3. Que peut-on dire d'une suite croissante et majorée?

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$



On note que

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+1/3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+2/3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{3} \times f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \times f(1) \end{aligned}$$

Donc u_3 apparaît comme la somme des aires de trois rectangles de base de même longueur égale à $1/3$ et dont les hauteurs respectives sont $f(1/3)$, $f(2/3)$ et $f(1)$; Cette zone est teintée en violet sur le diagramme ci-dessus. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f(1)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n apparaît comme la somme des aires de n rectangles de base de même longueur égale à $1/n$ et dont les hauteurs respectives sont $f(1/n)$, $f(2/n), \ldots, f(1)$. On peut donc espérer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'aire délimitée par l'axe des abscisses, le graphe de la fonction f et les deux droites verticales d'équation respective $x = 0$ et $x = 1$. Autrement dit, on peut espérer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'intégrale de f c'est à dire vers $\ln(2)$. Ce résultat sera rigoureusement démontré pendant votre année de sup.

Exercice 136

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. On pose $S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$. Simplifier $(a-1)S$. En déduire une expression explicite de S.
2. En vous inspirant de ce qui précède, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$
3. Quel est le plus grand entier naturel que l'on peut écrire en binaire avec 10 bits?

Exercice 137

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels telle que $p_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} \leqslant 1 + p_1 \times \cdots \times p_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 2^{(2^{n-1})}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, appelons p_n le n^{e} nombre premier positif par ordre croissant. Ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$,... Soit alors n un entier naturel non nul. L'entier naturel $N = 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ est strictement plus grand que 1 donc admet forcément un diviseur premier positif. Il existe donc un entier naturel non nul k tel que $p_k \mid N$. Si on suppose que $k \leqslant n$ alors p_k divise N et divise $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ donc divise 1, ce qui est absurde. On en déduit que $k \geqslant n+1$. Sachant qu'on a classé les nombres premiers par ordre croissant, $p_k \geqslant p_{n+1}$. Enfin, comme p_k divise N, on sait que $p_k \leqslant N$. Finalement, pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} \leqslant 1 + p_1 \times \cdots \times p_n$. On peut alors utiliser le résultat de l'exercice et trouver une estimation du n^{e} nombre premier... qui est très grossière.

Exercice 138

Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \dfrac{a}{x^2+1} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

Exercice 139

Soit x et y deux complexes. On pose $s = x + y$ et $p = xy$.

1. Développer s^2, s^3
2. Écrire $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ en fonction de s et p.
3. On suppose x et y non nuls. Écrire $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ en fonction de s et p.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on suppose que $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$. En utilisant la deuxième identité trouvée dans la question 2, trouver une expression de $\cos(3\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$.

Exercice 140

Soit x, y et z trois complexes. On pose $s = x + y + z$, $t = xy + yz + xz$ et $p = xyz$.

1. Développer s^2, s^3, t^2
2. Écrire $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$ en fonction de s, t et p.

Les calculs de l'exercice précédent, très semblables à ceux de l'exercice 139, peuvent paraître gratuits. Mais ils fondent une partie de la théorie des polynômes. On peut par exemple trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux fonctions polynomiales aient une racine commune sans jamais calculer lesdites racines. On fixe par exemple $a \in \mathbb{R}$ et on considère les fonctions polynomiales

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - ax + 1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + (a+1)x + 2a \end{array}$$

La fonction f étant polynomiale de degré 2, on sait qu'elle admet deux points d'annulation x_1 et x_2 dans $\mathbb{C}$. Mais les expressions explicites de ces nombres complexes ne sont pas élémentaires et surtout leur forme dépend de a. Ceci étant, f et g ont un point d'annulation commun si et seulement si x_1 ou x_2 est un point d'annulation de g ce qui équivaut à $g(x_1)g(x_2) = 0$. On pose $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$ et on exploite les formules de l'exercice 139.

$$\begin{aligned} g(x_1)g(x_2) &= \left(x_1^2 + (a+1)x_1 + 2a\right)\left(x_2^2 + (a+1)x_2 + 2a\right) \\ &= (x_1x_2)^2 + (a+1)x_1x_2(x_1+x_2) + 2a(x_1^2+x_2^2) + (a+1)^2x_1x_2 + 2a(a+1)(x_1+x_2) + 4a^2 \\ &= p^2 + (a+1)ps + 2a(s^2-2p) + (a+1)^2p + 2a(a+1)s + 4a^2 \end{aligned}$$

Il reste à noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme développée $f(x)$ est celle de $(x-x_1)(x-x_2)$ soit $x^2 - sx + p$. En identifiant les deux formes développées de de la fonction polynomiale f, on en déduit que $s = a$ et $p = 1$. Finalement, $g(x_1)g(x_2) = 4a^3 + 8a^2 - a + 2$. Les deux fonctions polynomiales f et g ont donc un point d'annulation commun si et seulement si $4a^3 + 8a^2 - a + 2 = 0$. La technique de calcul exposée se généralise à tous les degrés. Même si elle est assez technique, les algorithmes de calcul sont systématiques et ont été automatisés.

Exercice 141

Soit n un entier naturel non nul. Calculer $S = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$.

Exercice 142

Soit n un entier naturel distinct de 0 et 1. Calculer $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \cdots + \dfrac{1}{n^2-1}$.

Exercice 143

Soit n un entier naturel. On pose $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1. Factoriser $n(n+3)+2$
2. On pose $q = (n+1)(n+2)$. Exprimer p en fonction de q; la lettre n ne doit plus apparaître.
3. Montrer que $p+1$ est le carré d'un entier naturel.

Exercice 144

Soit x et y deux complexes. Factoriser $x^2 + xy - 2y^2$.

Exercice 145

Développer l'expression qui suit en utilisant autant que possible des identités remarquables pour réduire la quantité de calculs.

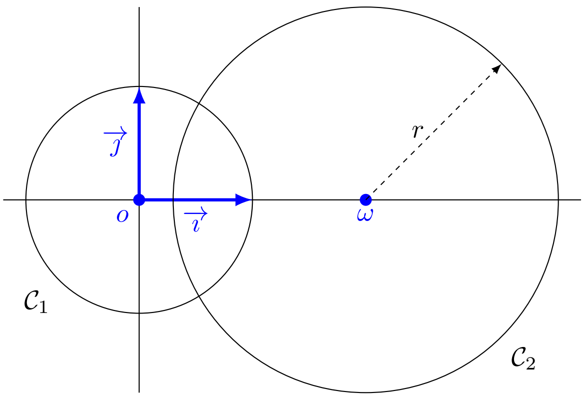
$$A = (x+y+z+t)(x+y-z-t)(x-y+z-t)(x-y-z+t)$$

Exercice 146

On considère une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n^2 - u_n + 1$.

1. Déterminer explicitement un réel c strictement positif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 - x + 1 \geqslant x + c$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant cn + u_0$.
3. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 147



Soit d un réel strictement positif et r un réel supérieur ou égal à 1. On travaille dans un plan muni d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre o et de rayon 1 et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre le point ω de coordonnées $(d, 0)$ et de rayon r. Une étude géométrique assure que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et $(x-d)^2 + y^2 = r^2$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ (x-d)^2+y^2=r^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2dx = d^2 - r^2 + 1 \\ 4d^2y^2 = 4d^2 - (d^2-r^2+1)^2 \end{array}\right.$$

Finalement les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement si $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \geqslant 0$.

1. Factoriser l'expression $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2$.
2. Montrer que les cercles considérés ont au moins un point d'intersection si et seulement si $r - 1 \leqslant d \leqslant r + 1$.

Exercice 148

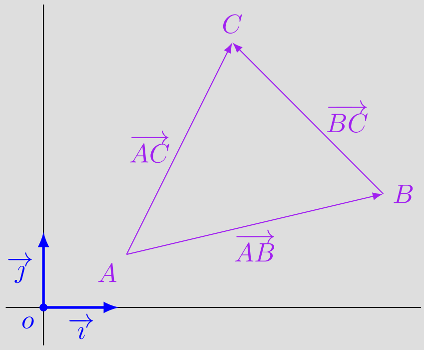
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que le plus grand élément de l'ensemble $\{x, y\}$ est $\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.
2. Proposer une formule analogue à celle de la question précédente pour le plus petit élément de $\{x, y\}$

Exercice 149

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

L'inégalité précédente est toujours valable si x et y sont des complexes, en travaillant bien évidemment avec des modules au lieu de valeurs absolues. À ce sujet, on pourra résoudre l'exercice de recherche 173. Sous la forme complexe, cette inégalité a une interprétation géométrique. En effet, travaillons dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ permettant d'identifier ce plan et $\mathbb{C}$; autrement dit, on associe à chaque point et à chaque vecteur de $\mathcal{P}$ son affixe. On considère alors trois points A, B et C de $\mathcal{P}$ dont on note a, b et c les affixes. On sait que les affixes respectives de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont $b-a$, $c-b$ et $c-a$. L'inégalité prouvée assure en particulier que



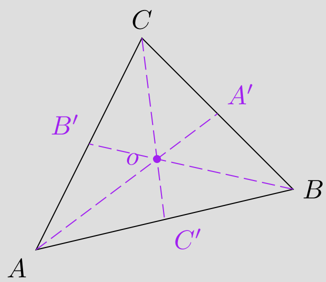
$$\begin{aligned} & |(c-b)+(b-a)| \leqslant |c-b| + |b-a| \\ \text{donc} \quad & |c-a| \leqslant |c-b| + |b-a| \\ \text{donc} \quad & AC \leqslant BC + AB \end{aligned}$$

puisque le module de l'affixe d'un vecteur liant deux points est la distance entre ces deux points. L'inégalité prouvée dans l'exercice 149 porte naturellement le nom d'«inégalité triangulaire» même quand elle met en jeu des réels. Dans le cas des complexes, elle illustre un cas très particulier d'un résultat géométrique bien connu: la plus courte distance entre deux points A et C est la longueur du segment AC. En effet, on vient de montrer que toute ligne brisée reliant A à C est plus longue que AC.

Exercice 150

1. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$, $3|a| \leqslant |a-b| + |a-c|$.
   On pourra utiliser le résultat de l'exercice 149.
2. Déduire de la question 1 que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$, $|a|+|b|+|c| \leqslant \dfrac{2}{3}\big(|a-b|+|b-c|+|a-c|\big)$.

Les preuves des résultats de cet exercice ne sont fondées que sur l'inégalité triangulaire et les propriétés de l'addition, qui sont aussi valables dans $\mathbb{C}$. Ces résultats ont donc des interprétations géométriques. Détaillons celle du résultat de la troisième question. Soit A, B et C trois points du plan non alignés. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[B, C]$, $[A, C]$ et $[A, B]$. Appelons o l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \vec{0}$. Comme A' est le milieu de $[B, C]$, on sait que $2\overrightarrow{oA'} = \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC}$. Par définition de o, on en déduit que $\overrightarrow{oA} + 2\overrightarrow{oA'} = \vec{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{oA}$ et $\overrightarrow{oA'}$ sont donc colinéaires. Autrement dit, o appartient à la droite (AA'). On montre de manière analogue que o appartient à (BB') et (CC').



Ce point est donc l'intersection des trois médianes du triangle (ABC). On choisit alors un repère orthonormé du plan dont l'origine est o. Ce repère permet d'identifier le plan et $\mathbb{C}$. On appelle alors a, b et c les affixes respectives de A, B et C. Par construction de o, on sait que $a+b+c=0$. On peut donc appliquer le résultat de la question 3. En notant que les affixes respectives de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont $b-a$, $c-b$ et $c-a$, ce résultat assure que

$$OA + OB + OC \leqslant \frac{2}{3}\big(AB + AC + BC\big)$$

En réutilisant la relation $\overrightarrow{oA} + 2\overrightarrow{oA'} = \vec{0}$ pour comparer les distances entre o, A et A', on note que $oA = 2\,oA'$. On en déduit que

$$AA' = oA + oA' = \frac{3\,oA}{2}$$

On a des estimations analogues pour les deux dernières médianes. En réinjectant ces formules dans l'inégalité précédente, on en déduit que $AA' + BB' + CC' \leqslant AB + AC + BC$. Autrement dit, la somme des longueurs des médianes d'un triangle est plus petite que le périmètre dudit triangle.

Exercice 151

Si f est une fonction et x, y sont deux réels distincts de son domaine de définition, on appelle taux d'accroissement de f entre x et y le réel

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

1. Écrire et simplifier le taux d'accroissement de $f : t \mapsto t^2 + 3t - 4$ entre deux réels x et y distincts.
2. Écrire et simplifier le taux d'accroissement de $f : t \mapsto \dfrac{2t+3}{t-5}$ entre deux réels x et y distincts et différents de 5.
3. Écrire et simplifier le taux d'accroissement de $f : t \mapsto \sqrt{4t-1}$ entre deux réels x et y plus grands que $\dfrac{1}{4}$ et distincts.

On reprend les notations de l'exercice précédent en notant de plus D le domaine de définition de f. On fixe alors le réel y et on considère la fonction

$$T : \begin{array}{ccc} D \setminus \{y\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{array}$$

Vous savez que si la fonction T admet une limite finie en y alors le graphe de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse y; on pourra lire le préambule de la douzième leçon pour des rappels plus précis. Un problème est que, par construction même, la limite à calculer pour la fonction T est une forme indéterminée. Les calculs de l'exercice précédent ont dû vous permettre de «lever l'indétermination» dans les trois cas étudiés, c'est à dire de trouver une expression de T avec laquelle le calcul de la limite voulue est immédiat.

Exercice 152

Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$?

Exercice 153

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.
2. Soit a, b, c, a', b', c' des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}\right)(aa' + bb' + cc') \geqslant (a+b+c)^2$$

   En déduire que si $(a+b+c)^2 \geqslant \dfrac{3}{2}(aa' + bb' + cc')$ alors $\dfrac{a}{a'} + \dfrac{b}{b'} + \dfrac{c}{c'} \geqslant \dfrac{3}{2}$.
   En déduire que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.
3. Soit $a, b, c, d, a', b', c', d'$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \frac{d}{d'}\right)(aa' + bb' + cc' + dd') \geqslant (a+b+c+d)^2$$

   En déduire que si $(a+b+c+d)^2 \geqslant 2(aa' + bb' + cc' + dd')$ alors $\dfrac{a}{a'} + \dfrac{b}{b'} + \dfrac{c}{c'} + \dfrac{d}{d'} \geqslant 2$.
   En déduire que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \geqslant 2$.

En 1954, Harold Seymour Shapiro s'est posé le problème suivant: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. La relation suivante est-elle vraie?

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \frac{n}{2}$$

L'exercice précédent montre que la réponse est positive lorsque $n = 3$ ou $n = 4$. Des calculs utilisant la même technique permettent de répondre de même lorsque $n \leqslant 6$. Pour des valeurs plus grandes de n, il faut utiliser d'autres techniques. Malheureusement, on peut trouver un contre exemple pour $n = 14$.

Exercice 154

Soit a, b et c trois réels de l'intervalle $]0\,;1]$.

1. Quel est le signe de $(ab-1)(ac-1)(bc-1)$?
2. Montrer que $a+b+c+\dfrac{1}{abc} \geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+abc$.
3. Soit a, b, c et d quatre réels tels que $0<a<b<c<d$. Montrer que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a} \geqslant \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{d}{c}+\dfrac{a}{d}$.

Exercice 155

Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$. Quand a-t-on égalité?

Exercice 156

Soit x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \geqslant \dfrac{3}{x+y+z}$. Quand a-t-on égalité?

Exercice 157

Montrer que pour tout réel x et y positifs, $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$.

Exercice 158

On considère une suite vérifiant $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\,]1\,;3[$, $\dfrac{5x-3}{x+1}\in\,]1\,;3[$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\,]1\,;3[$.
3. Montrer que pour tout $x\in\,]1\,;3[$, $\dfrac{5x-3}{x+1}>x$. Préciser alors les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. On veut reprendre l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une autre méthode. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n-3}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique**. Trouver alors l'expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver les résultats des questions 4 et 5.

Exercice 159

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{3x}+1\geqslant 0$.

Exercice 160

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\big(\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)\big)=x$.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\ln\big(f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}\big)=x$.

Exercice 161

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f\Big(\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)\Big) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln\Big(f(x) + \sqrt{f(x)^2 - 1}\Big) = x$.

On pose

$$a:\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad b:\ \begin{array}{rcl} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big) \end{array}$$

On a vérifié dans l'exercice 161 que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $a\big(b(x)\big) = x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $b\big(a(x)\big) = x$. On dit alors que a et b sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Du point de vue intuitif, si l'on considère la donné d'une fonction comme celle d'un algorithme permettant de construire un nombre à partir d'un autre nombre, alors l'algorithme b est celui qui permet de retrouver la donnée fournie à l'algorithme a lorsque l'on connaît le résultat de ce dernier. Les rôles de a et b sont naturellement interchangeables. L'exercice 160 propose deux autres bijections réciproques l'une de l'autre, à savoir

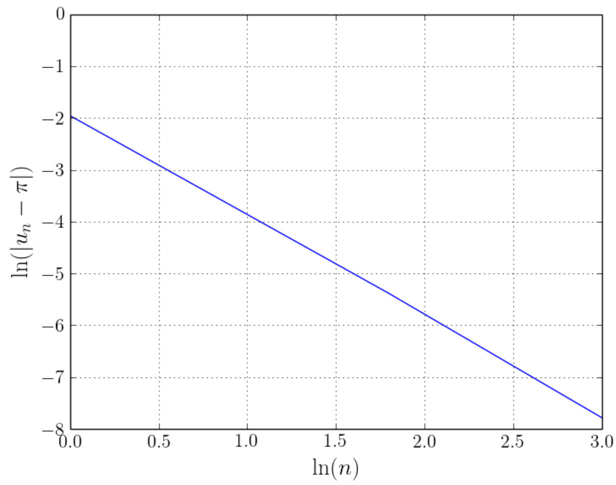
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big) \end{array}$$

Cette notion importante sera travaillée en sup mais vous en avez déjà rencontré plusieurs exemples: les fonctions ln et exp sont des bijections réciproques l'une de l'autre, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ toutes les deux considérées de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre...

Exercice 162

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4n}{k^2+n^2} - \frac{1}{n}$.

On peut démontrer qu'il existe deux constantes α et C strictement positives telles que la suite $\big(n^\alpha |u_n - \pi|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers C. Un expérimentateur écrit un programme, qui associe à chaque entier naturel non nul n une valeur approchée t_n de $|u_n - \pi|$. Il trace alors le graphe de $\ln(t_n)$ en fonction de $\ln(n)$ et obtient le graphe ci-contre.



1. Le graphe obtenu est-il cohérent avec le résultat admis?
2. Peut-on déterminer graphiquement les constantes α et C?

Exercice 163

Trouver la limite de la suite $\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 164

Soit $x \in [-2\,;1]$. En utilisant simplement des encadrements, donc sans utiliser d'étude de variations, encadrer le plus précisément possible le réel

$$A = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$$

Exercice 165

En utilisant simplement des encadrements, donc sans utiliser d'étude de variations, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$0 \leqslant 1 - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{2t^4}$$

Exercice 166

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer les réels $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ et $2\sqrt{n}$. En déduire que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. En travaillant comme dans la première question, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ appartient à $]99\,;100]$.

Exercice 167

L'objectif de cet exercice est de déterminer la précision des calculs faits par Neper lorsqu'il a construit et tabulé «sa» fonction, comme présenté dans la remarque située page 21 du document principal. Pour ce faire, on introduit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)-x+1 \end{array}$$

1. Étudier les variations de la fonction f. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x-1$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout $x \in [0\,;1[$, $\dfrac{x}{x-1} \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$.

3. Déduire de la question précédente que $-10^{-7}-10^{-13} \leqslant \ln(1-10^{-7}) \leqslant -10^{-7}$.

La suite $\big((1-10^{-7})^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $(1-10^{-7})^{p+1} \leqslant 0{,}99 \leqslant (1-10^{-7})^p$. Trouver la valeur de p correcte à la main est plus que laborieux! Mais une machine à calculer permet de vérifier que la valeur $p = 100503$ convient. Si votre machine ne permet pas de faire un tel calcul, essayez de travailler avec le logiciel sage, qui fait du calcul numérique en précision arbitraire et du calcul formel. Rendez-vous sur la page https://sagecell.sagemath.org/. On peut aussi vérifier que la valeur q telle que $(1-10^{-7})^{q+1} \leqslant 0{,}9995 \leqslant (1-10^{-7})^q$ est $q = 5001$.

4. Montrer que $-5\times10^{-8}-(p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99)+\dfrac{2p+1}{2}10^{-7} \leqslant 5\times10^{-8}$.

   En utilisant la valeur de p, en déduire que $\left|\ln(0{,}99)+\dfrac{2p+1}{2}10^{-7}\right| \leqslant 7\times10^{-8}$.

   On peut montrer de même, et on admet ici, que $\left|\ln(0{,}9995)+\dfrac{2q+1}{2}10^{-7}\right| \leqslant 7\times10^{-8}$.

5. Montrer que pour tous les entiers naturels m et n plus petits que 69,

$$\left|\ln(0{,}9995^m\times0{,}99^n)+5\big(m(2q+1)+n(2p+1)\big)10^{-8}\right| \leqslant 10^{-5}$$

Pour tous les entiers naturels m et n plus petits que 69, Neper a estimé la valeur du logarithme de $0{,}9995^m\times0{,}99^n$ par le rationnel $-5\big(m(2q+1)+n(2p+1)\big)10^{-8}$. En effectuant ces approximations pour obtenir la table «radicale» de la page 21 du document principal, Neper a donc déterminé des valeurs des logarithmes qui lui étaient utiles avec une précision meilleure que 10^{-5}, ce qui est un tour de force au XVI$^{\text{e}}$ siècle.

Exercice 168

Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;3\pi]$ tels que $\big(\cos(t)\big)^2+3\big(\sin(t)\big)^2 = 2$.

Exercice 169

Déterminer tous les réels t appartenant à $]-\pi/2\,;\pi/2[$ tels que $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \sqrt{3}$.

Exercice 170

Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin(t)-\cos(t) = \sqrt{2}$.

Exercice 171

Déterminer tous les réels x appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin(x) \geqslant \cos(2x)$.

Exercice 172

Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\frac{x}{2^0}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^1}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

Exercice 173

Soit z et z' deux complexes.

1. Montrer que $|z+z'|^2 - \big(|z|+|z'|\big)^2 = 2\big(\mathrm{Re}(\overline{z}\,z') - |\overline{z}\,z'|\big)$.
2. Montrer que pour tout complexe u, $\mathrm{Re}(u) \leqslant |u|$.
3. Déduire des deux questions précédentes que $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

Le résultat de la question 3 est connu sous le nom d'inégalité triangulaire. Il a une interprétation géométrique essentielle, qui est développée dans la remarque qui suit l'exercice 149. L'exercice 150 se généralise aussi au cadre des complexes puisqu'il se fonde uniquement sur l'inégalité triangulaire.

Exercice 174

Soit z un complexe qui n'est pas un réel négatif. On pose $v = z + |z|$.

1. Montrer que $\mathrm{Re}(v) > 0$. On peut alors poser $w = \dfrac{v}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}(v)}}$.
2. Montrer que $w^2 = z$.

L'exercice 174 assure que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$. Vous savez que la même propriété est vraie pour les réels négatifs; en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\left(\mathrm{i}\sqrt{-x}\right)^2 = x$. Finalement, pour tout complexe z, on peut trouver un complexe dont le carré est z. Autrement dit, tout complexe admet une «racine carrée». Notons de plus que si w et w' sont deux racines carrées de z alors $w^2 = w'^2$ donc $w^2 - w'^2 = 0$ donc, en utilisant [IR3], $w = w'$ ou $w = -w'$. Finalement, tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées distinctes, opposées l'une de l'autre. Une des différences essentielles avec le cas des réels positifs est que l'on ne peut pas distinguer une des deux racines carrées. En effet, si x est un réel positif, on a appelé racine carrée de x l'unique réel **positif** dont le carré est x. Mais dans $\mathbb{C}$, la notion de signe perd son sens. Vous verrez en sup que l'on ne peut pas trouver un autre critère permettant de choisir de manière systématique entre les deux racines carrées d'un complexe. Mais cette difficulté n'empêche pas que l'on utilise la notion, par exemple pour généraliser les formules de résolution des équations du second degré au cas des équations à coefficients complexes.

Exercice 175

On pose $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z' = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

1. Donner l'écriture algébrique de $\dfrac{z'}{z}$.
2. Donner l'écriture trigonométrique de z, de z' puis de $\dfrac{z'}{z}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 176

Soit n un entier naturel.

1. Donner la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^n$ en fonction du reste de la **division euclidienne** de n par 4.
2. Donner la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^{-n}$ en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.

Exercice 177

Soit θ et θ' deux réels.

1. Montrer que pour tout réel t, $\cos(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$. En déduire que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\cos\left(\dfrac{\theta - \theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}$.
2. Montrer que pour tout réel t, $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$. Déterminer alors une forme exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.
3. Déterminer une forme exponentielle des complexes $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3$ et $\left(\mathrm{i} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3$.

Exercice 178

L'objectif de cet exercice est de trouver tous les complexes z non nuls tels que $z^2 + \overline{z}^2 + z^3 = 0$, relation que l'on note (R). Pour ce faire, on introduit un complexe non nul z vérifiant (R) que l'on écrit sous forme trigonométrique. Il existe donc un réel strictement positif r et un réel θ appartenant à $[-\pi\,;\pi[$ tel que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

1. Montrer que $2\cos(2\theta) + r\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = 0$
2. Montrer que θ appartient à l'ensemble $\left\{-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}, 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.
3. Montrer que z appartient à $\{-2, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}\}$.
4. Réciproquement, les éléments de l'ensemble décrit dans la question précédente vérifient-ils bien la relation (R)?

Exercice 179

L'objectif de cet exercice consiste à mettre en pratique la méthode inventée par Cardan, Tartaglia et Bombelli, rapidement décrite dans la remarque du cours principal page 31. On considère deux réels p et q et on appelle (E) l'équation $x^3 = px + q$, d'inconnue complexe x.

1. Soit $u \in \mathbb{C}^*$. On pose $x = u + \dfrac{p}{3u}$. Montrer que si x est une solution de (E) alors $(u^3)^2 - qu^3 + \dfrac{p^3}{27} = 0$.

La question précédente assure que pour résoudre (E), il suffit de résoudre l'équation du second degré (F) $y^2 - qy + \dfrac{p^3}{27} = 0$, d'inconnue complexe y, de déterminer les complexes u dont le cube est une des solutions de (F), puis de construire les complexes x correspondants. Comme on a raisonné par **condition nécessaires**, il faut aussi vérifier que les complexes ainsi construits sont bien des solutions de (E). Un des problèmes posé par l'algorithme de résolution décrit est la nécessité de chercher des complexes dont le cube est connu. Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre ce problème. On peut seulement trouver des complexes dont le cube est connu lorsqu'on connaît déjà un tel complexe; ce résultat est prouvé dans la question qui suit.

2. On pose $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
   a. Donner la forme trigonométrique de j.
   b. Montrer que si a est un complexe non nul, a, $a\mathrm{j}$ et $a\mathrm{j}^2$ sont trois complexes deux à deux distincts ayant le même cube.

L'objectif de l'exercice est à présent de résoudre (E) dans plusieurs cas particuliers.

3. Dans cette question, on suppose que $(p, q) = (6, 9)$, c'est à dire que l'on considère l'équation (E) $x^3 = 6x + 9$ d'inconnue complexe x.
   a. Résoudre l'équation (F) et en déduire une solution potentielle de (E).
   b. Déterminer trois solutions de (E).
4. Dans cette question, on suppose que $(p, q) = (51, 104)$, c'est à dire que l'on considère l'équation (E) $x^3 = 51x + 104$ d'inconnue complexe x.
   a. Résoudre l'équation (F).
   b. Mettre sous forme algébrique $(4 + \mathrm{i})^3$.
   c. Déterminer trois solutions de (E).

Vous démontrerez en sup qu'une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions. On est donc sûr d'avoir déterminé toutes les solutions des équations étudiées dans les questions 3 et 4. Vous démontrerez aussi en sup que pour tout réel x, il existe un unique réel y vérifiant $y^3 = x$; ce réel y est souvent noté $\sqrt[3]{x}$. C'est pourquoi lorsque le discriminant de l'équation (F) est positif, on est sûr que (E) admet une solution réelle et on peut en donner une expression explicite. Cardan a déjà souligné ce résultat dans son ouvrage *Ars Magna* en 1547. Il écrit ainsi que si $27q^2 - 4p^3 \geqslant 0$ alors l'équation $x^3 = px + q$ d'inconnue réelle x admet une solution

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

En 1547, l'ensemble des nombres complexes n'était pas encore construit. C'est d'ailleurs pour généraliser la formule de Cardan que Bombelli introduit de nouvelles notions qui conduiront ensuite à la construction propre de l'ensemble $\mathbb{C}$, débarrassé de tous les paradoxes qui ont entouré sa naissance.

Exercice 180

Trouver la limite de la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^{-k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 181

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1. Étudier les variations de la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - x + 1 \end{array}$$
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
2. Déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{1}{n} \leqslant u_n - \ln(n) \leqslant 1$.
4. Montrer que la suite $\big(u_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel appartenant à $[0\,;1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{u_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{u_n - \ln(n)}{\ln(n)}$

Comme la suite $\big(u_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et comme la suite $\big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, on en déduit que la suite $\big(u_n/\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ à la même «vitesse» que la suite $\big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cette notion intuitive de «vitesse» de divergence ou de convergence sera formalisée et étudiée en sup. Notez pour finir que le réel

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)\right)$$

est connu sous le nom de constante d'Euler-Mascheroni. On sait très peu de choses sur elle; on ne sait même pas si ce réel est un rationnel. La dernière question assure juste que $\gamma \in [0\,;1]$.

Exercice 182

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel appartenant à $[1\,;2]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \mathrm{e}^{-x\ln(p)}$$

Les exercices 181 et 182 sont deux études de convergence de la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque x vaut 1 ou 2. Vous généraliserez en sup les résultats obtenus dans ces exercices en montrant que pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $x > 1$. Pour chaque valeur de x appartenant à $]1\,;+\infty[$, on appelle $\zeta(x)$ la limite de cette suite. On construit ainsi une fonction $x \mapsto \zeta(x)$, connue sous le nom de fonction «zéta» de Riemann, qui joue un rôle important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres. Il existe des dizaines de formules liées à cette fonction. Vous montrez par exemple en sup le surprenant résultat suivant

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{c'est à dire} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 183

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à $n-1$ et pour tout $k \in \mathcal{A}$, on pose

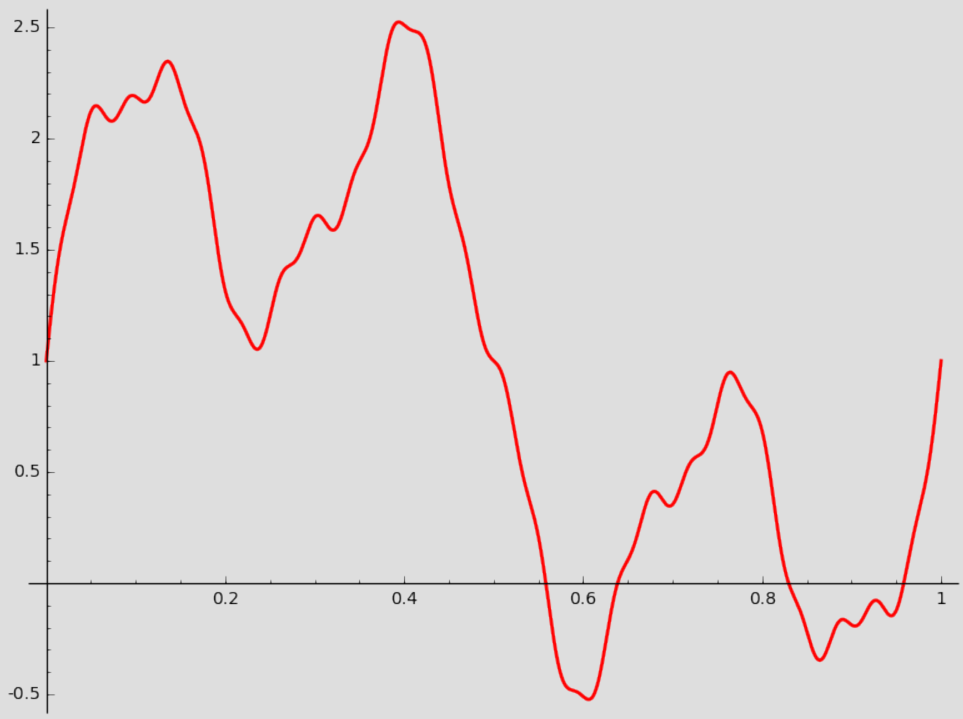
$$b_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=0}^{n-1} a_p \exp\left(\frac{2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right)$$

Montrer que pour tout $k \in \mathcal{A}$, $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right)$.

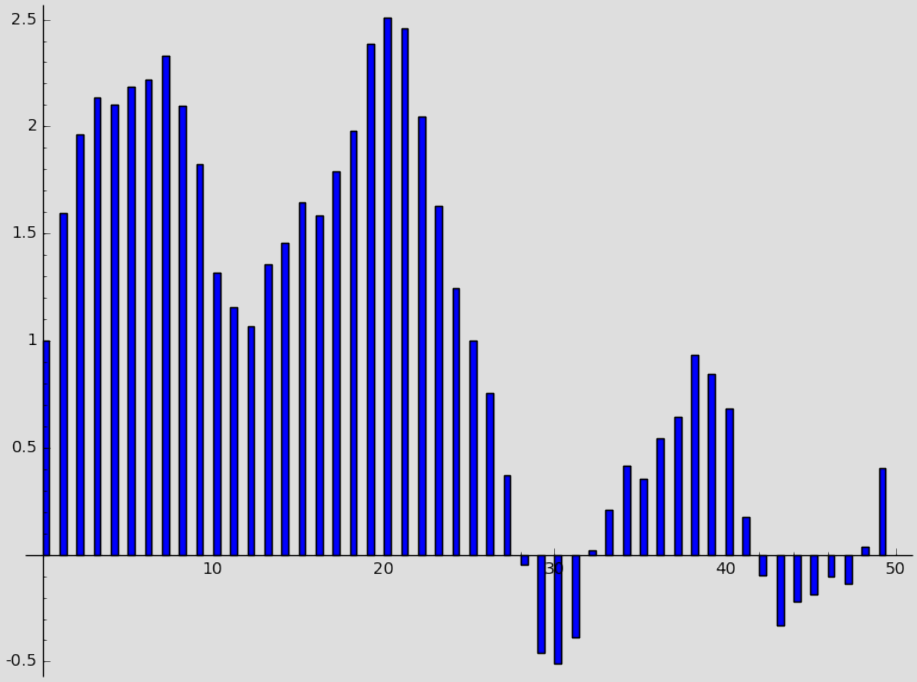
On considère une fonction périodique f précisant l'évolution en fonction du temps d'une grandeur périodique quelconque: tension au bornes d'un dipôle électrique dans un circuit alimenté par un courant périodique, élongation d'un ressort soumis à une force périodique... On échantillonne le signal étudié, c'est à dire que l'on mesure la valeur prise par f en des temps $t_0, t_1, \ldots, t_n$ régulièrement espacés sur un intervalle de la période T du signal. On construit ainsi un échantillon $(a_0,\ldots,a_{n-1})$ du signal. La suite finie $(b_0,\ldots,b_n)$ définie dans l'exercice 183 permet alors de déterminer la fréquence dominante f du signal et ses harmoniques. Pour préciser cette idée, considérons la fonction suivante, dont une période est 1.

$$f : t \mapsto 1 + \sin(2\pi t) + 0{,}8\,\sin(6\pi t) + 0{,}2\,\sin(16\pi t) + 0{,}05\,\sin(48\pi t)$$

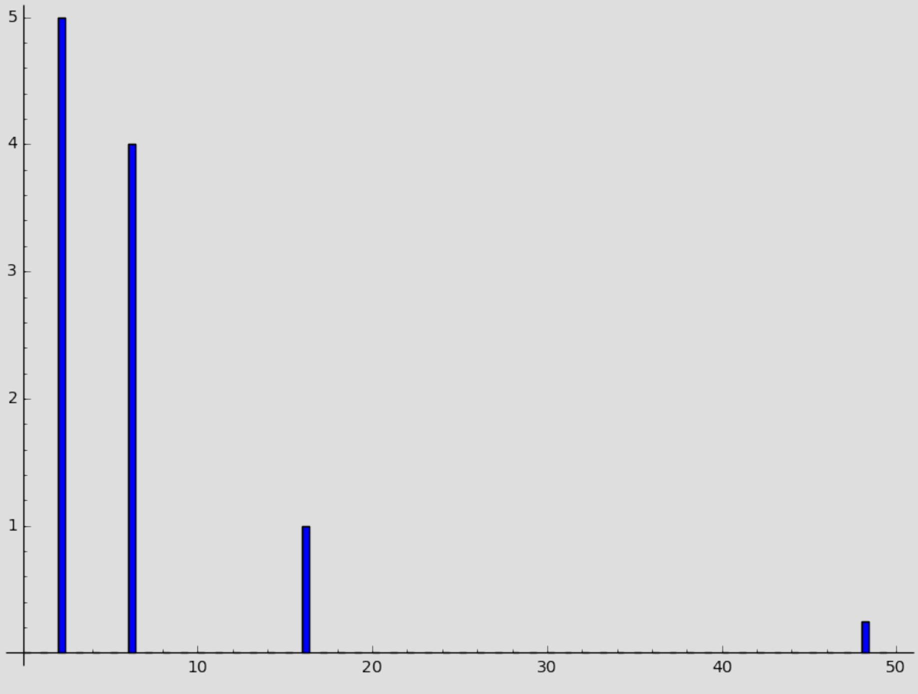
On a tracé ci-dessous le graphe de la fonction f sur $[0\,;1]$, que l'on échantillonne en 50 points.



On peut alors représenter notre échantillon à l'aide d'un diagramme en bâtons en traçant, pour tout entier naturel p plus petit que 49, un bâton à l'abscisse p de hauteur a_p. On on obtient ainsi



On peut alors représenter les termes de la suite $\big(|b_0|, \ldots, |b_{n-1}|\big)$ sous la même forme que ceux de l'échantillon étudié pour obtenir le diagramme suivant.



Chaque module d'un terme de la suite $(b_0, \ldots, b_p)$ donne des renseignements sur une composantes sinusoïdales du signal initial. On observe ainsi que le signal initial est en effet la superposition de quatre composantes sinusoïdales. On sait que la fréquence de la deuxième composante est le triple de celle de la première puisque l'abscisse du deuxième bâton est le triple de celle du premier. De plus, l'amplitude de la deuxième composante 80% de celle de la première puisque la hauteur du deuxième bâton est $4/5$ de celle du premier. Le troisième bâton correspond de même à une troisième composante du signal de fréquence 8 fois supérieure à celle de la première composante et d'amplitude 5 fois plus faible. Enfin, le quatrième bâton correspond à une quatrième composante du signal de fréquence 24 fois supérieure à celle de la première composante et d'amplitude 20 fois plus faible. Bien entendu, l'exemple est artificiel puisque l'on connaissait une expression analytique du signal initial. Et cette brève remarque passe sur les difficultés liées au choix de l'intervalle et la fréquence d'échantillonnage d'un signal que l'on ne peut que mesurer. Ceci étant, l'idée générale est correcte et la transformation de l'échantillon $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ d'un signal en la suite $(b_0, \ldots, b_{n-1})$, appelée transformation de Fourier discrète, est très utile en physique et en informatique. Dans ce cadre, l'exercice 183 montre que l'on peut reconstruire un signal à partir de la donnée de sa transformée de Fourier discrète. Notez que la donnée du diagramme précédent est insuffisant puisqu'il ne donne que les modules des complexes $b_0, \ldots, b_p$.

Exercice 184

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3(x-1)^3$.

1. Dériver trois fois la fonction f; on appelle g la fonction obtenue.

2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Vous en chercherez une racine rationnelle x_0 puis déterminerez trois réels a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$; ces trois réels peuvent être déterminés «de tête» en effectuant des développements partiels, ce qui justifie la présence de l'icône «pingouin qui réfléchit».

Soit a, b, et c trois réels tels que $0 \leqslant a < b < c \leqslant 1$. On considère les fonctions polynomiales

$$P_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \end{array}, \quad P_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \end{array} \quad \text{et} \quad P_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \end{array}$$

Vous démontrerez en sup sans faire aucun calcul, que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 2, et pour tout réel x, $P(x) = P(a)P_1(x) + P(b)P_2(x) + P(c)P_3(x)$. Une fois généralisée, cette écriture est souvent utile en mathématiques; elle est due au mathématicien italien Joseph-Louis Lagrange. Si on appelle a_1, a_2 et a_3 les intégrales respective de P_1, P_2 et P_3 sur $[0\,;1]$, on obtient alors par simple intégration de la formule précédente que pour tout fonction polynomiale P de degré au plus 2,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = a_1 P(a) + a_2 P(b) + a_3 P(c)$$

On peut même montrer que si on choisit $b = 1/2$ et a et c tels que $a + c = 1$, la formule précédente est valable aussi pour les fonctions polynomiale de degré au plus 3. En choisissant par exemple $a = 0$, $b = 1/2$ et $c = 1$, on obtient la formule dite «des trois niveaux». Pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 3,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,P(0) + \frac{2}{3}\,P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\,P(1)$$

Cette formule permet par exemple aux terrassiers de calculer rapidement le volume de terre que l'on peut stocker sur une surface donnée. Mais si les formules ainsi obtenues en faisant varier a, b et c sont exactes pour calculer des intégrales de fonctions polynomiales de degré au plus 2 voire 3, on peut trouver des polynômes de degré au moins 4 pour lesquels elles ne sont plus valides a priori. La question s'est donc posée de savoir s'il existait des choix pour a, b et c qui permettent d'obtenir des formules exactes pour des fonctions polynomiales de degré plus élevé. Étrangement, si vous utilisez pour valeurs de a, b et c les trois solutions de l'équation étudiée dans l'exercice 184, vous obtenez une formule valable pour toutes les fonctions polynomiales jusqu'au degré 5. Plus précisément, pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 5,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{18}\,P\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}\right) + \frac{4}{9}\,P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18}\,P\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}\right)$$

Vous pourrez généraliser cette formule surprenante en sup. En effet, si n est un entier naturel non nul et si on dérive n fois la fonction $x \mapsto x^n(x-1)^n$, on obtient une fonction polynomiale g de degré n qui s'annule exactement n fois, tous les points d'annulation étant situés dans $]-1\,;1[$. Si on note $x_1, \ldots, x_n$ les points d'annulation de g, que l'on classe par ordre croissant, on peut calculer explicitement n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus $2n-1$,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$$

Les fonctions construites pour chaque valeur de n sont liées à des polynômes célèbres, les polynômes de Tchebychev, ainsi nommés en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev. Ces polynômes apparaissent dans beaucoup de domaines des mathématiques.

Exercice 185

Pour toute fonction f, on note $f^{(1)}$ la dérivée de f, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(3)}$ la dérivée de $f^{(2)}$... et de proche en proche on note $f^{(k+1)}$ la dérivée de $f^{(k)}$ pour tout entier naturel non nul k tant que les calculs ont un sens.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+a} \end{array}$$

   a. Déterminer les expressions explicites de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

   b. En vous inspirant des expressions de la question précédente, déterminer l'expression explicite de $f^{(k)}$ pour tout entier naturel non nul k et prouver la formule proposée.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'expression explicite de $g^{(k)}$ lorsque

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+3}{3x-2} \end{array}$$

Exercice 186

Soit a et b deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

On suppose que la fonction a admet une primitive A et que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{A(x)}b(x)$ admet une primitive B.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $U : x \mapsto \mathrm{e}^{A(x)}f(x) - B(x)$ est nulle.
2. Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \big(B(x) + K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$.
3. Dans les deux questions qui précèdent, on a vérifié que si f est une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, alors il existe une constante K telle que f soit la fonction $x \mapsto \big(B(x)+K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$. On considère réciproquement un réel K. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \big(B(x)+K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g'(x) + a(x)g(x) = b(x)$.

Finalement, on a montré que l'ensemble des fonctions réelles f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ est l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(B(x)+K\big)\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}, \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $xf'(x) - (x+1)f(x) = x\mathrm{e}^{x}$.

Dans cette exercice, on étudie des équations différentielles, qui sont des équations dont les solutions sont des fonctions. L'étude de telles équations est fondamentale car la plupart des phénomènes physiques sont modélisés par des grandeurs qui vérifient des équations différentielles, et que l'on doit expliciter ou dont il faut au moins déterminer des propriétés. L'algorithme proposé dans l'exercice 186 sera revu et complété en sup. En sup seront aussi mis en place énormément d'outils permettant de préciser les propriétés des solutions des équations différentielles que l'on ne sait pas résoudre explicitement.

Indications des exercices

Indications pour l'exercice 72

Dans chaque calcul, pensez à simplifier les données avant de commencer, et de simplifier le résultat. Notez que lorsqu'un numérateur ou un dénominateur apparaît naturellement sous la forme d'un produit, il est maladroit d'effectuer ce produit car les simplifications éventuelles sont bien plus visibles sur un produit explicite. On n'effectue le produit des facteurs du numérateur ou du dénominateur concerné qu'après avoir simplifié la fraction finale. Vous pourrez revoir des calculs de ce type dans les corrigés des exercices 1 et 63. Notez de plus que

- Un dénominateur commun pour F_1 est 18.
- Pour la transformation de F_2 et de F_4, commencez par regrouper les fractions ayant les mêmes dénominateurs au cas où se produirait une simplification.
- Un dénominateur commun pour F_5 est 336
- Notez que la somme des chiffres de 51 est divisible par 3; il en est donc de même de 51.

Indications pour l'exercice 73

Vous pourrez revoir des calculs de ce type dans les corrigés des exercices 2, 18 et 27.

Indications pour l'exercice 75

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 4, 17 et 51.

Indications pour l'exercice 76

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 5, 17, 28, 39 et 51.

Indications pour l'exercice 77

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 6 et 39. Notez que pour gérer A_2, vous pourrez faire apparaître les facteurs a, b et $a-b$, et que pour gérer A_4, vous pourrez faire apparaître les facteurs a, b et $b+1$.

Indications pour l'exercice 79

Vous pourrez revoir la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer plus efficacement A_4.

Indications pour l'exercice 80

Utilisez la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 3 et mise en œuvre dans les exercices 11 et 47 pour gérer la transformation de la question 2. Utilisez la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 11 et mise en œuvre dans l'exercice 47 pour gérer la transformation de la question 3.

Indications pour l'exercice 81

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 10. Pour gérer la dernière question, vous pourrez remarquer qu'il y a autant de manières de construire un terme xyz qu'il y a de manières de choisir un triplet d'éléments de $\{1, 2, 3\}$ formés d'entiers deux à deux distincts; chaque triplet est en effet formé par la succession des trois lettres choisies successivement dans les trois parenthèses du produit manipulé, en codant 1 pour x, 2 pour y et 3 pour z.

Indications pour l'exercice 82

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 14, 35 et 45.

Indications pour l'exercice 83

N'utilisez pas systématiquement la notion de discriminant. Vous pourrez revoir comment exploiter la connaissance d'un point d'annulation «évident» d'une expression polynomiale de degré 2 pour factoriser cette dernière dans l'exercice 13. N'oubliez pas aussi de simplifier les racines carrées qui peuvent apparaître; on pourra revoir les exercices 22, 40, 67 et 72.

Indications pour l'exercice 84

Repérez l'identité remarquable (IR3). Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, elle permet aussi bien de factoriser des différences de carrés que des sommes de carrées. En effet, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a + ib)(a - ib)$; vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 34 sur ce sujet.

- Finissez bien la factorisation de A_8 dans $\mathbb{C}$.
- Notez que A_9 est la différence de deux carrés.
- Vous pourrez mettre $x - 3$ en facteur dans A_{11}.
- Vous pourrez mettre $(2x + 1)^2$ en facteur dans A_{12}.
- Vous pourrez mettre $3x - 2y$ en facteur dans A_{13}.
- Vous pourrez mettre $4x + 3$ en facteur dans A_{15}.

Indications pour l'exercice 85

- Pour être sûr d'utiliser un dénominateur pertinent dans l'étude de F_1, cherchez si $2x^2 + 7x + 3$ est le produit de $2x + 1$ par une expression polynomiale de degré 1 en opérant comme dans tous les exercices de «calcul mental».
- Tous les termes du numérateur de F_2 ainsi que son dénominateur admettent $x - 1$ comme facteur commun.
- Pour gérer F_4, notez que $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$.

Indications pour l'exercice 87

Pour chaque fonction, écrivez $\mathbb{R}$ comme une réunion de parties de telle sorte à ce que sur chaque partie choisie vous puissiez déterminer le signe des arguments des valeurs absolues apparaissant dans la fonction manipulée.

Indications pour l'exercice 88

N'oubliez pas de simplifier les racines carrées; on pourra revoir les exercices 22 et 72. Notez aussi que pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$; pour oter les valeurs absolues, il faut connaître le signe de a.

Indications pour l'exercice 89

Pour revoir des simplifications de ce type, on pourra relire les corrigés des exercices 22 et 72.

Indications pour l'exercice 90

N'utilisez pas systématiquement la notion de «quantité conjuguée» qui, si elle permet d'éliminer les racines carrées au dénominateur d'une fraction, a le défaut de souvent rendre plus complexe l'écriture des objets manipulés. En particulier, pour gérer A et B, pensez à utiliser l'identité remarquable (IR3). Notez enfin que le numérateur de B aun point d'annulation évident; la factorisation de cette expression est donc immédiate si on utilise la technique travaillée dans l'exercice 13.

Indications pour l'exercice 91

Pensez à utiliser la l'identité de la question 1 pour gérer la question 2. Pour savoir en quel réel écrire cette identité, noter que pour tout réel positif x, $\left(\sqrt{x}\right)^3 = x\sqrt{x}$.

Indications pour l'exercice 92

L'objectif de cet exercice est de montrer une identité qui est une égalité. À ce sujet, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 qui expose et illustre la méthode pour aborder ce genre de preuve, et celui des exercices 24, 44 et et 68 qui présentent d'autres exemples de cette méthode. Comme il faut favoriser les développements, pour aborder cet exercice, il suffit de développer le membre de droite de l'identité.

Indications pour l'exercice 93

L'objectif de cet exercice est de montrer une identité qui est une égalité. À ce sujet, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 qui expose et illustre la méthode pour aborder ce genre de preuve, et celui des exercices 24, 44 et et 68 qui présentent d'autres exemples de cette méthode. Comme il faut favoriser les développements, pour aborder cet exercice, il suffit de développer le produit du membre de droite de l'identité par le dénominateur du membre de gauche de cette même identité.

Indications pour l'exercice 94

Cet exercice est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. Pour déterminer le signe de l'expression obtenue en effectuant la différence des deux membres de l'identité, il faut la factoriser. Pensez à utiliser les identités remarquables.

Indications pour l'exercice 95

Cet exercice est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. Pour déterminer le signe d'une expression, il faut la factoriser. Dans notre cas, l'expression obtenue en effectuant la différence des deux membres de l'identité se simplifie grandement après mise au même dénominateur des différents termes; vous pourrez commencer par factoriser son numérateur par $x - y$.

Indications pour l'exercice 96

Dans le calcul permettant de déduire la réponse à la deuxième question de l'identité démontrée dans la première question, n'oubliez pas que si a est un réel quelconque, $\sqrt{a^2} = |a|$; il faut donc vérifier une contrainte sur un réel pour que la racine carrée de son carré soit lui-même.

Indications pour l'exercice 97

- Notez que 4 et 64 sont des puissances de 2. Il n'est d'ailleurs pas inutile de mémoriser les premières puissances de 2, de 2^0 à 2^{10}; en les écrivant par puissance croissante, on obtient 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 et 1024.
- Pour la seconde simplification, notez que $\sqrt{17} + 4$ et $\sqrt{17} - 4$ sont deux expressions conjuguées donc que leur produit est très simple. «Regrouper» les logarithmes à l'aide de la propriété (LN1) est donc une bonne idée.

Indications pour l'exercice 98

Pour revoir des simplifications analogues à celles de cet exercice, on pourra relire les corrigés des exercices 29 et 30. Préciser l'ensemble des réels pour lesquels une expression E a un sens consiste à trouver une **condition nécessaire et suffisante** sur des réels pour que l'on puisse effectivement faire les calculs induits par l'expression E, c'est à dire déterminer un ensemble P tel que

- Pour toute donnée appartenant à P, on peut calculer E avec les données choisies.
- Toute donnée avec laquelle on peut calculer E appartient nécessairement à à P.

Pour la dernière simplification, notez que $\sqrt{x} + 1$ et $\sqrt{x} - 1$ sont deux expressions conjuguées donc que leur produit est très simple. «Regrouper» les logarithmes à l'aide de la propriété (LN2) est donc une bonne idée.

Indications pour l'exercice 99

1. On cherche une partie D de $\mathbb{R}$ telle que les réels x de D vérifient $x^2 + x > 0$ et $3x^2 + 2x - 1 > 0$, et les réels x vérifiant $x^2 + x > 0$ et $3x^2 + 2x - 1 > 0$ appartiennent à D. Il faut donc connaître le signe des expressions $x^2 + x$ et $3x^2 + 2x - 1$ pour tous les réels. Factoriser ces expressions est donc la bonne méthode. Pour factoriser la deuxième expression, pensez à chercher un point d'annulation «évident» afin d'optimiser les calculs comme dans l'exercice 13.
2. Regrouper les logarithmes à l'aide des propriétés (LN1) et (LN2) permet de transformer l'expression étudiée en logarithme d'une expression rationnelle qui se simplifie d'autant plus vite que les factorisations nécessaires ont été effectuées dans la question précédente.

Indications pour l'exercice 100

1. Cette question est la preuve de deux identités fondées sur une inégalité. En effet il est nécessaire de considérer l'encadrement à prouver comme la juxtaposition de deux inégalités strictes afin de pouvoir utiliser les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, présentées dans les exercices 25 et 26. D'autres exemples de rédaction de ce type de preuve se trouvent dans les exercices 53 et 60. Vous pourrez préférer une autre méthode ne nécessitant même pas de connaître l'encadrement a priori. En effet, en utilisant la transformation exposée dans les exercices 3 et surtout 11 et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, encadrer l'expression proposée est élémentaire. Cette méthode est d'ailleurs utilisée dans l'exercice 38 dont vous pourrez relire le corrigé.
2. En regroupant les logarithmes de chaque expression apparaissant dans l'encadrement à l'aide de la propriété (LN2), on est amené à étudier une estimation de la forme $0 \leqslant \ln(A) \leqslant \ln(B)$. On peut alors utiliser la formule (LN5).

Indications pour l'exercice 101

1. Cette question est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, qui sont efficaces même dans notre cas élémentaire. Il suffit en effet de trouver le signe de $x^2 + 2x - 3$ pour tous les réels appartenant à $[1\,;+\infty[$. Factoriser cette expression est donc la bonne méthode. Pour ce faire, pensez à chercher un point d'annulation «évident» de $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ afin d'optimiser les calculs comme dans l'exercice 13.
2. Soit $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$. Pensez à utiliser l'identité prouvée dans la question 1 pour un réel bien choisi construit à partir de x... en vérifiant impérativement que ce réel appartient bien à $[1\,;+\infty[$.

Indications pour l'exercice 102

- La première question est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. Pour résoudre les deux questions qui suivent, on exploite l'identité de la première question soit en la transformant (question 2) soit en l'écrivant pour un couple de réels bien choisi construit à partir des données (question 3). Dans tous les cas, avant d'utiliser l'identité de la première question pour un couple (a, b) de réels, vérifier que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

Indications pour l'exercice 103

- Cette question est la preuve de deux identités fondées sur une inégalité. En effet il est nécessaire de considérer l'encadrement à prouver comme la juxtaposition de deux inégalités strictes afin de pouvoir utiliser les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, présentées dans les exercices 25 et 26. D'autres exemples de rédaction de ce type de preuve se trouvent dans les exercices 53 et 60.
- Cet question est la preuve d'une identité fondée sur une égalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 24, 31, 44 et 68. Dans le corrigé du second exercice, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, c'est à dire comment anticiper les calculs pour favoriser les développements. Remplacer $f(x)$ par son expression en fonction de x est cependant maladroit car l'expression à manipuler se simplifie grandement à l'aide des identités remarquables (IR1) et (IR3).
- Cette question est encore la preuve d'une identité fondée sur une égalité. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on substituera les expressions explicites de $f(x)$ et $f(y)$ dans $\dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$ et on écrira l'expression obtenue sous la forme d'une fraction en développant son numérateur et son dénominateur. C'est laborieux mais sans grande difficulté.

Indications pour l'exercice 104

Cet exercice est analogue à l'exercice 37, dont vous pouvez relire le corrigé. Revoyez en particulier les erreurs à ne pas commettre lors de la manipulation d'inégalités mettant en jeu des différences, la méthode d'encadrement du carré d'une expression alors que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone, et la raison pour laquelle la deuxième méthode d'encadrement utilisée est meilleure que la première dans notre cas. La question 2 demande d'effectuer une mise sous forme canonique d'une expression polynomiale de degré 2; vous pourrez revoir ce type de manipulation dans les exercices 14, 35 et 45.

Indications pour l'exercice 105

2. On noter que l'inverse de $x + \frac{1}{x}$ est $\frac{x}{x^2+1}$.
3. Les calculs de cette question sont analogues à ceux des deux premières questions à l'exception du fait que l'on manipule parfois des grandeurs négatives dans les produits. Il est conseillé de systématiquement se ramener à des grandeurs positives avant de «multiplier» des inégalités entre elles. Ainsi, si a, b, c et d sont quatre réels tels que $a \leqslant b \leqslant 0$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, ne tentez pas d'inventer une nouvelle règle de manipulation des inégalités. Écrivez simplement que $0 \leqslant -b \leqslant -a$ donc $-bc \leqslant -ad$ en manipulant des grandeurs positives. Finalement, dans le cas ébauché, $ad \leqslant bc$.
4. Dans ce dernier cas, la méthode de la deuxième question est proscrite puisque 0 appartient au domaine de travail. Pour encadrer l'expression fournie sans transformation préliminaire, il suffit

   - D'encadrer $\frac{1}{x^2+1}$ en faisant attention à la gestion du carré; revoir par exemple l'exercice 37.
   - De finir l'encadrement demandé lorsque x est négatif, puis lorsque x est positif.
   - De conserver les estimations les plus mauvaises, qui seules sont valables dans tous les cas.

   Enfin, avec un peu d'imagination, vous pourrez trouver en quelques lignes un encadrement optimal en utilisant les identités remarquables (IR1) et (IR2).

Indications pour l'exercice 106

Cet exercice est analogue à l'exercice 38, dont vous pouvez relire le corrigé. Revoyez en particulier les erreurs à ne pas commettre lors de la manipulation d'inégalités mettant en jeu des quotients et méditez à nouveau la raison pour laquelle la deuxième méthode d'encadrement utilisée est meilleure que la première dans notre cas. La deuxième question demande d'effectuer une transformation d'une expression obtenue comme quotient de deux fonctions polynomiales de degré 1; vous pourrez revoir des manipulations de ce type dans la question 3 de l'exercice 3, dans les deux premières questions de l'exercice 11. Les calculs de la troisième question induisent la manipulation de grandeurs négatives dans les produits. Il est conseillé de systématiquement se ramener à des grandeurs positives avant de «multiplier» des inégalités entre elles. Ainsi, si a, b, c et d sont quatre réels tels que $a \leqslant b \leqslant 0$ et $c \leqslant d \leqslant 0$, ne tentez pas d'inventer une nouvelle règle de manipulation des inégalités. Écrivez simplement que $0 \leqslant -b \leqslant -a$ et $0 \leqslant -d \leqslant -c$ donc $bd \leqslant ac$ en manipulant des grandeurs positives.

Indications pour l'exercice 107

Vous pourrez tester plusieurs méthodes et essayer de prévoir si elles donnent les mêmes estimations ou pas.

- Encadrez chaque logarithme en utilisant la croissance de cette fonction. Il faut ensuite faire attention à la gestion des différences; vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 37.
- Regroupez les logarithmes et encadrez leur argument qui est alors un quotient avant de conclure avec la croissance de la fonction logarithme. Il faut ensuite faire attention à la gestion des quotients; vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 38.
- Reprenez la méthode précédente en transformant le quotient comme dans l'exercice 38. Cette transformation est introduite dans la question 3 de l'exercice 3 puis reprise dans les deux premières questions de l'exercice 11

Indications pour l'exercice 108

La gestion des valeurs absolues pose le même problème que celle des carrés. La fonction valeur absolue est en effet strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Vous pourrez donc relire le corrigé de l'exercice 37 pour étudier le problème. Dans la deuxième question se pose le problème de la gestion des inégalités strictes. La seule chose à savoir est que si a, b, c et d sont quatre réels alors

- si $a \leqslant b$ et $b < c$ alors $a < c$.
- si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.
- si $a \leqslant b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.
- si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

La gestion des produits est plus délicate mais inutile dans cet exercice.

Indications pour l'exercice 109

On trouvera des exemples de classement de réels dans le cours et dans le corrigé de l'exercice 36, qu'il faut impérativement travailler à nouveau. Pour la première question, il faut traiter trois cas selon que x et y appartiennent tous les deux à $]-\infty\,;1[$, tous les deux à $]1\,;+\infty[$, ou sont situés de part et d'autre de 1. Dans la deuxième question, bien que l'on puisse classer $\ln(x)$ et $\ln(y)$ et connaître le signe de ces réels, on ne peut pas prévoir le classement des réels $\big(\ln(x)\big)^2$ et $\big(\ln(y)\big)^2$; on pourra justifier ce point à l'aide d'exemples bien choisis.

Indications pour l'exercice 110

Vous trouverez des exemples de tels calculs dans l'exercice 41. Dans le cas de E, il peut être pertinent de ne pas mettre au même dénominateur les termes des réels dont on calcule le sinus mais de simplifier l'écriture du réel à calculer via la formule (T8). La même remarque s'applique au cas de G avec les formules (T3) et (T4). En ce qui concerne H, avez-vous remarqué que 138 est divisible par 3? Enfin dans les trois derniers exemples, le terme $k\pi$ disparaît directement si k est pair à l'aide des formules (T4) ou (T10). Si k est impair, on écrit $k\pi = \pi + (k-1)\pi$ et, $k-1$ étant pair, on peut comme avant faire disparaître k. Dans ces trois derniers calculs, essayez de trouver une formule valable pour tout entier k, même si les calculs se font en distinguant deux cas suivant que k est pair ou impair.

Indications pour l'exercice 111

Vous trouverez des exemples de tels calculs dans l'exercice 42. Dans les deux derniers exemples, le terme $k\pi$ disparaît directement si k est pair à l'aide des formules (T4) ou (T10). Si k est impair, on écrit $k\pi = \pi + (k-1)\pi$ et, $k-1$ étant pair, on peut comme avant faire disparaître k. Dans ces deux derniers calculs, essayez de trouver une formule valable pour tout entier k, même si les calculs se font en distinguant deux cas suivant que k est pair ou impair.

Indications pour l'exercice 112

Les calculs des sinus et cosinus des réels explicitement connus, qui ne se font pas par une lecture directe sur le cercle trigonométrique, se mènent comme dans l'exercice 41.

Indications pour l'exercice 113

Soit n un entier naturel et x un réel. Comme $\big(\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2 = 1$, $\big(\cos(x)\big)^2 = 1 - \big(\sin(x)\big)^2$ donc, en utilisant les propriétés des puissances, $\big(\cos(x)\big)^{2n} = \Big(1 - \big(\sin(x)\big)^2\Big)^n$. En utilisant cette formule pour différentes valeurs de n, vous pourrez remplacer tous les termes contenant $\cos(x)$ par des expressions polynomiales en $\sin(x)$, qu'il vous faudra alors développer.

Indications pour l'exercice 115

Il est impératif de revoir les indications de l'exercice 43, où la méthode de résolution d'équations et inéquations trigonométrique est détaillée. Le corrigé du même exercice propose alors d'autres exemples. Dans cet exercice, quelques exemples demandent une attention particulière.

- Dans les questions 3, 7 et 8, on résout une équation ou une inéquation sur un domaine d'amplitude strictement plus grande que 2π. On effectue donc plus d'un tour du cercle. Le même point géométrique du cercle trigonométrique fournit donc parfois plus d'une solution puisqu'il est paramétré par plusieurs mesures du même angle. Vous pourrez étudier le corrigé de la question 3 – après l'avoir cherchée – avant d'essayer de résoudre les questions 7 et 8.
- Dans la question 9, on cherche l'ensemble des réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin(t) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Sous cette forme, la méthode générale s'applique sans beaucoup de changements.
- Dans la question 10, on note que pour tout $t \in [0\,;2\pi]$, $t + \pi/4 \in [\pi/4\,;9\pi/4]$. On cherche donc en premier lieu les réels appartenant à $[\pi/4\,;9\pi/4]$ dont le sinus vaut $1/\sqrt{2}$. Pour ce faire, faites attention au fait que lorsque vous «parcourez» le cercle trigonométrique, le point paramétré par l'angle dont une mesure est $\pi/4$ apparaît deux fois. Étudiez bien cette question et son corrigé avant de passer au dernier exemple.
- Dans la question 11, on note que pour tout $t \in [0\,;\pi]$, $2t + \pi/6 \in [\pi/6\,;13\pi/6]$. On cherche donc en premier lieu les réels appartenant à $[\pi/6\,;13\pi/6]$ dont le sinus vaut $1/\sqrt{2}$, avant d'en déduire les réels cherchés.

Indications pour l'exercice 116

Lorsque l'on met sous forme algébrique des produits, des puissances ou des quotients de complexes, on peut parfois optimiser les calculs en écrivant les complexes manipulés sous la forme λz où λ est un réel et z est un complexe plus simple que le complexe initial. Donnons quelques exemples de ce genre de manipulation.

- Pour écrire sous forme algébrique le complexe $z = (6+3\text{i})(5-20\text{i})$, on peut écrire

  $$z = (6+3\text{i})(5-20\text{i}) = (6\times 5) - (6\times 20\text{i}) + (5\times 3\text{i}) - (3\times 20\text{i}^2) = 30 - 120\text{i} + 15\text{i} + 60 = 90 - 105\text{i}$$
  ou $$z = 15(2+\text{i})(1-4\text{i}) = 15\big(2 - (2\times 4\text{i}) + \text{i} - 4\text{i}^2\big) = 15(6-7\text{i})$$

  La deuxième méthode permet de manipuler des entiers moins grands. Même si on devrait développer l'écriture finale obtenue via la deuxième méthode pour obtenir la forme algébrique exacte de z, ce développement est superflu, voire maladroit, dans beaucoup d'applications.

- Pour écrire sous forme algébrique le complexe $z = (3+3\text{i})^3$, on peut écrire, en utilisant la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8,

  $$z = 3^3 + 3\times 3^2\times 3\text{i} + 3\times 3\times (3\text{i})^2 + (3\text{i})^3 = 27 + 81\text{i} - 81 - 27\text{i} = -54 + 54\text{i}$$
  ou $$z = 3^3(1+\text{i})^3 = 27(1 + 3\text{i} + 3\text{i}^2 + \text{i}^3) = 27(-2+2\text{i})$$

  Encore une fois, La deuxième méthode permet de manipuler des entiers moins grands, donc est préférable même si la forme finale n'est pas exactement la forme algébrique; cette deuxième forme serait d'ailleurs plus naturellement écrite $54(-1+\text{i})$.

- Pour écrire sous forme algébrique le complexe $z = \dfrac{3}{4-6\text{i}}$, on peut écrire

  $$z = \frac{3(4+6\text{i})}{4^2+6^2} = \frac{3(4+6\text{i})}{4^2+6^2} = \frac{12+18\text{i}}{52} = \frac{6+9\text{i}}{26}$$
  ou $$z = \frac{3}{2}\times\frac{1}{2-3\text{i}} = \frac{3}{2}\times\frac{2+3\text{i}}{2^2+3^2} = \frac{3(2+3\text{i})}{26}$$

  Dans ce cas, la mise en facteur du réel 2 a permis de ne pas faire artificiellement apparaître un facteur commun entre numérateur et dénominateur de z lié à la méthode classique d'écriture sous forme algébrique d'un inverse, que l'on peut ensuite oublier de simplifier.

Avant de mettre sous forme algébrique un complexe, il faut réfléchir à l'écriture minimisant le nombre de calculs, en particulier minimisant le nombre de produits et de quotients à gérer; on ne tient pas compte dans notre anticipation des calculs de l'écriture sous forme algébrique des sommes et des différences de complexes déjà mis sous forme algébriques puisque ces opérations sont immédiates. Considérons par exemple trois complexes a, b et c, le dernier étant non nul.

- Pour écrire la forme algébrique de $ac+bc$, on effectue deux produits; il est préférable de travailler avec $(a+b)c$ puisque dans ce cas un seul produit apparaît.
- Pour écrire la forme algébrique de $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$, on effectue deux quotients; il est préférable de travailler avec $\dfrac{a+b}{c}$ puisque dans ce cas un seul produit apparaît .
- Pour écrire la forme algébrique de $\dfrac{a^2}{c^2}$, on effectue deux produits et un quotient; il est préférable de travailler avec $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$ puisque dans ce cas un seul produit apparaît sans que le nombre de quotient augmente.

Pour conclure,

- Écrire z_{13} sous la forme $(1-\text{i})\left(\dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}}\right)^{20}$ permet de gérer ce complexe.
- Faites attention au choix du dénominateur commun des deux fractions composant z_{14}.
- Pour développer le cube apparaissant dans z_{16}, vous pourrez utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8.

Indications pour l'exercice 117

- Dans cet exercice, on raisonne par équivalences. Les différentes égalités écrites sont liées par le symbole $\iff$ qui signifie «si et seulement si». Deux égalités ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Vous pourrez voir des exemples de ce raisonnement en relisant le corrigé de l'exercice 19.
- Il faut aussi lire les indications de l'exercice 116 pour savoir comment minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique des complexes.

Indications pour l'exercice 118

- Vues les opérations mises en jeu, il peut ne exister de valeurs de t à écarter que lors du calcul d'inverse; en effet dans ce cas, le complexe par lequel on divise doit être non nul. Autrement dit, déterminer les valeurs de t à écarter consiste à résoudre une équation de la forme $F(t) = 0$ d'inconnue réelle t. On doit donc raisonner par équivalences. Les différentes égalités écrites sont liées par la locution «si et seulement si». Deux égalités ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Vous pourrez voir des exemples de ce raisonnement en relisant le corrigé de l'exercice 19. Dans notre cas, comme pour tout réel t, $F(t)$ est une expression complexe, on sait que $F(t) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}\big(F(t)\big) = 0$ et $\mathrm{Im}\big(F(t)\big) = 0$, ce qui donne deux équations sur t qui sont toujours élémentaires à résoudre dans cet exercice.
- Il faut aussi lire les indications de l'exercice 116 pour savoir comment minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique des complexes.

Indications pour l'exercice 119

- Dans cet exercice, on raisonne par équivalences puisqu'on cherche une **condition nécessaire et suffisante** sur le réel t pour qu'un complexe paramétré par t soit correctement défini et soit un réel. Pour chaque complexe z manipulé, on doit donc résoudre une ou deux équations: une équation pour connaître les valeurs de t pour lesquelles le dénominateur éventuel de z est non nul, une équation pour connaître les valeurs de t pour lesquelles la partie imaginaire de z est nulle ce qui équivaut aussi $z = \overline{z}$. Dans les deux cas, les contraintes sur t sont liées par le symbole $\iff$ ou la locution «si et seulement si». Deux contraintes ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Vous pourrez voir des exemples de ce raisonnement en relisant le corrigé de l'exercice 19.
- L'objectif de cet exercice n'est pas d'écrire des complexes sous forme algébrique, même si la connaissance de cette forme permet de conclure. On peut en effet être parfois plus efficace en exploitant quelques idées.
  - Pour tout complexes z et z' et tout réel λ, $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$; des formules analogues sont valables pour les parties imaginaires. On peut alors parfois calculer «de tête» la partie imaginaire ou la partie réelle d'un complexe qui apparaît comme une somme de produits d'un complexe par un réel, sans écrire explicitement la forme du complexe considéré. Par exemple, si t est un réel, la partie imaginaire de
  $$z = t\mathrm{i} + 4(t+1)^2 + t(2\mathrm{i} + 3) + 4t - \mathrm{i}$$
  est $$\mathrm{Im}(z) = t + 0 + 2t + 0 - 1 = 3t - 1$$
  - On peut exploiter les opérations conservant le caractère réel ou pas d'un complexe. Par exemple, si z est un complexe non nul, z est réel si et seulement si $2z$ l'est si et seulement si $3/z$ l'est... Ainsi, si t est un réel, on note que
  $$\frac{3}{1 - \mathrm{i}t} \in \mathbb{R} \iff 1 - \mathrm{i}t \in \mathbb{R} \iff t = 0$$
  Le «passage à l'inverse» nous a permis d'éviter le calcul de la partie imaginaire d'un quotient.
  - Pour tout complexe a et tout complexe non nul b, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a\,\overline{c}}{|c|^2}$. Comme $|c|^2$ est un réel, $\dfrac{a}{c}$ est réel si et seulement si $a\overline{c}$ l'est. Même si elle ne change rien au calcul à effectuer, cette remarque permet de ne pas «traîner» le module de c dans toutes les équivalences permettant de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que a/c soit réel.
  - Un complexe z est réel si et seulement si $z - \overline{z} = 0$. Autrement dit on peut visualiser le problème posé comme la résolution d'une équation, ce qui ne se fait pas nécessairement en distinguant partie réelle et partie imaginaire des complexes mis en jeu.
- Il faut aussi lire les indications de l'exercice 116 pour savoir comment minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique des complexes et relire les indications de l'exercice 43 pour gérer z_4.

Indications pour l'exercice 120

Vous pourrez relire les corrigés des exercices 54 et 55. La technique utilisée pour trouver des arguments plus petits définissant le même complexe a aussi été travaillée dans l'exercice 41 dont vous pourrez aussi étudier le corrigé une nouvelle fois.

Indications pour l'exercice 121

Vous trouverez des exemples d'écriture sous forme trigonométrique dans les corrigés des exercices 57 et 58, que vous pourrez relire avec les indications correspondantes. Pour chaque complexe z donné, on peut calculer $|z|$ en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire de z puis écrire explicitement le complexe $z/|z|$ afin de lire un argument de z sur le cercle trigonométrique donné page 34, que l'on peut tracer rapidement. Ceci étant, on rappelle que peu de complexes ont une forme trigonométrique explicitement connue: ce sont les multiples par un réel non nul de 1, i, $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Il est donc possible, et bien plus efficace, de «deviner» le réel strictement positif qu'il faut mettre en facteur dans chaque complexe z fourni afin que la lecture d'un argument de z soit immédiate. Par exemple, pour mettre sous forme trigonométrique le complexe $z = 1 + \mathrm{i}$, on note que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont égales donc que la mise en facteur de $\sqrt{2}$ permet de conclure directement.

Indications pour l'exercice 122

La forme trigonométrique est adaptée à la manipulation de produits, de quotients et, plus généralement, de puissances. Ces opérations sont bien plus pénibles à effectuer avec des complexes écrits sous forme algébrique. Il est donc judicieux d'écrire les complexes manipulés sous forme trigonométrique le plus rapidement possible. Sur ce thème, revoir l'exercice 58. Relire aussi le corrigé de l'exercice 121 pour revoir comment repérer rapidement les complexes dont une forme trigonométrique est connue. Si on est conduit à effectuer des produits, des quotients ou des puissances avec des formes algébriques, ne pas oublier d'optimiser les calculs en utilisant les «astuces» détaillées dans les indications de l'exercice 116. En particulier, pour gérer z_2, z_5 et z_6, pensez à regrouper les puissances pour effectuer cette opération en dernier lieu. Ainsi

$$z_2 = \left((2+3\mathrm{i})\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{5}\right)\right)^3, \quad z_5 = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2, \quad z_6 = \left(\frac{5+11\mathrm{i}\sqrt{3}}{7-4\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$$

Indications pour l'exercice 123

- Pour effectuer des produits, des quotients ou des puissances avec des formes algébriques, ne pas oublier d'optimiser les calculs en utilisant les «astuces» détaillées dans les indications de l'exercice 116.
- La forme trigonométriques des complexes est adaptée pour effectuer des produits, des quotients, et plus généralement des puissances mais rend impossible la simplifications de sommes et de différences, sauf dans un cas particulier traité dans l'exercice de recherche 177. Au contraire, on sait faire tous les calculs avec la forme algébrique des complexes mais les produits et les quotients sont un peu plus longs à effectuer qu'avec la forme trigonométrique et les puissances d'ordre élevé ne sont pas raisonnablement gérables. Pour mener les calculs demandé de la manière la plus efficace possible, on doit donc adapter l'écriture des données aux opérations à effectuer. Il faut donc être capable de repérer rapidement les complexes dont la forme trigonométrique est connue. Sur ce point, vous pourrez relire le corrigé des exercices 57, 58 et 121.
- Comme l'énoncé impose que les résultats des divers calculs soient donnés sous forme algébrique, il faut aussi savoir écrire rapidement sous cette forme un complexe donnée sous forme trigonométrique. Vous pourrez relire les corrigés des exercices 54 et 55. La technique utilisée pour trouver des arguments plus petits définissant le même complexe a aussi été travaillée dans l'exercice 41 dont vous pourrez étudier le corrigé une nouvelle fois.
- Afin de gérer z_6, vous pourrez écrire $z_7 = (1-3\mathrm{i})\left(\frac{1-3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^6$.

Indications pour l'exercice 124

Chaque complexe apparaissant dans l'écriture de z peut se mettre sous forme trigonométrique, le dénominateur de la fraction se gérant avec les formules (T7) et (T13).

Indications pour l'exercice 125

Souvenez-vous que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^8 = \left(z^2\right)^4$. On peut donc en premier lieu calculer le carré du complexe introduit, dont l'expression est très simple. Le double-produit apparaissant est en particulier de la forme $\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b}$ où a et b sont des réels numériquement connus vérifiant $a > b$. On peut le simplifier en regroupant les racines à l'aide de la formule (R1) puis en utilisant l'identité remarquable (IR3).

Indications pour l'exercice 126

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Ne confondez pas $|x+y|^2$ avec $(x+y)^2$; le premier vaut $(x+y)\overline{(x+y)}$ d'après la formule (M1).
2. L'objectif de cette question est de prouver une identité qui est une égalité. Avant de lire ce corrigé, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 qui expose et illustre la méthode pour aborder ce genre de preuve, et celui de l'exercice 44 qui présente deux autres exemples de cette méthode. Pour gérer la partie réelle apparaissant, vous pourrez utiliser la formule (C9) sur les complexes.

Indications pour l'exercice 127

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Dans tous les calculs qui suivent, la première manipulation consiste à réécrire la somme en l'indiçant par une partie de $\mathbb{N}$ formé d'entiers consécutifs commençant à 0. Pour ce faire, on utilise l'astuce présentée dans la leçon page 38. Ainsi, si $a_p, \ldots, a_q$ sont des complexes,

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{p+k}$$

Dans chaque calcul, faites attention à la position des parenthèses, pour savoir si certains termes sont «englobés» dans les sommes ou pas. On pourra relire la remarque à la page 37 du cours. Enfin, pour factoriser la dernière expression, vous pourrez exploiter la méthode travaillée dans l'exercice 13 en trouvant un point d'annulation de la fonction polynomiale apparaissant.

Indications pour l'exercice 128

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Dans tous les calculs qui suivent, la première manipulation consiste à réécrire la somme en l'indiçant par une partie de $\mathbb{N}$ formé d'entiers consécutifs commençant à 0. Pour ce faire, on utilise l'astuce présentée dans la leçon page 38. Ainsi, si $a_p, \ldots, a_q$ sont des complexes,

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{p+k}$$

Dans chaque calcul, il faut distinguer plusieurs cas suivant les raisons des suites géométriques dont on additionne les termes. Plus précisément,

- L'expression S_1 ne fait apparaître qu'une somme géométrique de raison $\dfrac{x}{2}$; on doit donc distinguer deux cas suivant que $x = 2$ ou pas.
- L'expression S_2 ne fait apparaître qu'une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{y^{2n}}$; on doit donc distinguer deux cas suivant que $|y| = 1$ ou pas.
- L'expression S_3 ne fait apparaître qu'une somme géométrique de raison xyz; on doit donc distinguer deux cas suivant que $xyz = 1$ ou pas.
- L'expression S_4 fait apparaître deux sommes géométriques de raison respectives x et y; on doit donc distinguer quatre cas suivant que $x = 1$ ou pas et que $y = 1$ ou pas.
- Pour gérer S_5, il faut développer le carré afin de pouvoir «couper» cette expression en la somme du produit par des constantes de trois sommes géométriques de raison respectives x^2, y^2 et xy. On pourra alors noter que les cas suivant couvrent toutes les possibilités.
  - $|x| = 1$ et $|y| = 1$ et $xy > 0$,
  - $|x| = 1$ et $|y| = 1$ et $xy < 0$,
  - $|x| = 1$ et $|y| \neq 1$,
  - $|x| \neq 1$ et $|y| = 1$,
  - $|x| \neq 1$ et $|y| \neq 1$ et $xy = 1$,
  - $|x| \neq 1$ et $|y| \neq 1$ et $xy \neq 1$,

  Dans les quatre premiers cas, on a suffisamment de connaissances sur x et y pour savoir si $xy = 1$ ou pas.
- L'expression S_6 ne fait apparaître qu'une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{y^3}$; on doit donc distinguer deux cas suivant que $y = 1$ ou pas.
- La formule (ER1) permet d'écrire S_7 sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^a \times \left(\mathrm{e}^b\right)^k$ où a et b sont des réels qui ne dépendent pas de l'indice de sommation; en revanche ces réels dépendent de n, ce qui pose aucun problème. On obtient donc une somme géométrique de raison e^a et on doit discuter suivant la nullité de a ou pas pour conclure.

- Pour gérer S_8, il faut séparer le terme sommé en deux fractions afin de faire apparaître deux sommes géométriques de raison respectives $\frac{x^3}{y}$ et y. Il est alors efficace de discuter suivant y. En effet, si $y = 1$, une des sommes se calcule et on distingue deux cas suivant que $x = 1$ ou pas pour gérer la seconde. De même si $y \neq 1$, une des sommes se calcule et on distingue deux cas suivant que $x^3 = y$ ou pas pour gérer la seconde.
- Utilisez la formule (LN1) sur le logarithme pour transformer S_9 en somme de termes d'une suite arithmétique.
- En séparant les termes de S_{10}, on obtient une somme géométrique de raison x et une somme arithmétique.

Indications pour l'exercice 129

La première question a été traitée dans la leçon. Pour traiter la dernière question, pensez à utiliser la formule (LN2) sur le logarithme.

Indications pour l'exercice 130

Pour dériver une fonction, il faut reconnaître dans l'expression de cette fonction un des modèles du cours présenté dans les points (D1) à (D5). Les modèles (D1) à (D4) sont classés par ordre de «pénibilité» croissante pour effectuer les calculs. C'est pourquoi, dériver $x \mapsto x + \sin(x)$, qui relève du modèle (D1), est plus simple que dériver $x \mapsto x\sin(x)$, qui relève du modèle (D3), lui-même plus simple que dériver $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, qui relève du modèle (D4). Le cas de (D5) est un peu particulier. Il est délicat à repérer et à utiliser **sauf** lorsque u est une fonction affine (avec les notations de la leçon). En effet, si a et b sont deux réels et si f est une fonction, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$. En tout état de cause, simplifier l'expression d'une fonction avant de la dériver consiste à la transformer de telle sorte que sa dérivation fasse appel à un modèle plus simple que celui nécessaire pour gérer l'écriture initiale. Cherchez seul ces réécritures; si vous ne voyez aucune transformations simplificatrices, faites le calcul sur l'expression de base avant de voir ci-dessous si une simplification est possible. Si tel est le cas, refaites le calcul!

- On peut aussi transformer a priori l'écriture de l'expression de la fonction f_2 en utilisant la technique classique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47.
- On peut faire partiellement disparaître le carré dans l'expression de f_3 avant de dériver en utilisant la formule (ER1) afin de transformer l'expression $\left(e^x\right)^2$ en e^{2x} lors que x est un réel.
- Appliquez la formule (LN3) pour simplifier l'expression de f_7; il ne doit rester aucune racine carrée.
- Écrire l'expression de la fonction f_8 sous la forme d'une puissance d'ordre négatif donne un calcul immédiat en utilisant la formule (D5); en effet, il n'y a plus de quotient à dériver.
- Appliquer la formule (LN2) permet d'écrire l'expression de la fonction f_{12} sous la forme de la différence de deux fonctions, chacune étant élémentaire à dériver.
- Pour gérer la dérivation de f_{15}, notez que la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est un quotient, qui s'écrit de manière claire sous la forme d'une somme, bien plus facile à dériver.
- Le calcul de la dérivée de la fonction f_{16} se mène sans simplification. En revanche, l'expression finale de la dérivée obtenue se simplifie en utilisant la première formule de trigonométrie.
- Il est inutile de gérer deux carrés si on écrit la fonction f_{17} sous la forme $x \mapsto \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$.

Indications pour l'exercice 131

Pour calculer une primitive, il faut avant tout repérer le «modèle» de la fonction que l'on manipule afin de savoir quelle formule appliquer. Notez que la formule (PR1) est utilisée presque pour chaque calcul car on repère souvent des modèles à constante multiplicative près, que l'on ajuste après coup. Par exemple, la fonction

$$f : x \mapsto 3x\cos\left(x^2\right)$$

est «presque» de la forme $u'\cos(u)$ puisque la dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$. Comme le facteur devant le cosinus est $3x$ et pas $2x$, on doit en effet corriger un peu la forme repérée. Plus précisément, dans notre cas, si on note u la fonction $x \mapsto x^2$, la fonction manipulée est

$$x \mapsto \frac{3}{2}u'(x)\cos\left(u(x)\right)$$

Le cours donne une primitive de $x \mapsto u'(x)\cos\left(u(x)\right)$, qu'il suffit de multiplier par $3/2$ pour obtenir une primitive de f d'après la formule (PR1). Vous vous êtes aujourd'hui suffisamment entraîné à ajuster mentalement des expressions pour pouvoir mener ces ajustements de tête. Dans ce qui suit, je précise le modèle de chaque fonction a étudier sans me préoccuper des constantes multiplicatives que vous devez ajuster; par exemple si j'écris qu'une fonction est de la forme uu', il est tout à fait possible qu'elle soit égale à $2uu'$ ou à $-7uu'$. Prenez le temps de chercher vous-même le modèle utile dans chaque question et ne consultez ces indications qu'en dernier recours. Enfin, il faut parfois modifier l'écriture de la fonction pour repérer un modèle; là encore réfléchissez vous-même au problème avant tout.

- La fonction f_1 relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto x^3$.
- La fonction f_2 relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction f_3 relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. N'oubliez pas de gérer les valeurs absolues apparaissant dans une primitive de f.
- Ne pas oublier d'écrire la fonction f_4 sous forme d'une puissance.
- Utilisez le résultat (ER1) pour écrire f_5 sous la forme d'une exponentielle. Cette fonction relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
- La fonction f_6 est donc de la forme $\dfrac{u'}{u}$. N'oubliez pas de gérer les valeurs absolues apparaissant dans une primitive de cette forme.
- La fonction f_7 relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
- Appliquez la formule (LN3) pour simplifier l'expression de f_8; il ne doit rester aucune racine carrée. On peut alors remarquer que la fonction f_8 est de la forme $u'u$.
- La technique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, permet d'écrire l'expression de la fonction f_9 sous la forme de la somme d'une constante et de l'inverse d'une fonction polynomiale de degré 1. Le deuxième terme de cette somme relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. N'oubliez pas de gérer les valeurs absolues apparaissant dans une primitive de f.
- Ne pas oublier d'écrire la fonction f_{10} en utilisant une fonction puissance d'ordre négatif. Vous repérerez alors que la fonction f_{10} est de la forme $u'u^{-3}$.
- La fonction f_{11} est de la forme $u'u^2$.
- Écrivez l'expression de f_{12} sous la forme d'une somme de produit de constantes par des exponentielles.
- La fonction f_{13} est de la forme $2u'\cos(u)$.
- Ne pas oublier d'écrire la fonction f_{14} en utilisant une fonction puissance d'ordre négatif.
- La fonction f_{15} est de la forme $\dfrac{u'}{u}$. N'oubliez pas de gérer les valeurs absolues apparaissant dans une primitive de cette forme.
- La technique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, permet d'écrire d'écrire l'expression de la fonction f_{16} sous la forme de la somme d'une constante et de l'inverse d'une fonction polynomiale de degré 1. Le deuxième terme de cette somme relève du modèle (PR3) en utilisant $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. N'oubliez pas de gérer les valeurs absolues apparaissant dans une primitive de f.
- La fonction f_{17} est de la forme $u'\mathrm{e}^u$.
- On peut gérer la fonction f_{18} comme on a géré la fonction f_{12}; dans ce cas vous pourrez revoir comment développer de manière efficace une puissance d'ordre élevé dans l'exercice 8. Mais on peut être encore plus efficace en notant que la fonction f_{18} est de la forme $u'u^4$. Il peut être formateur de faire les deux calculs pour en comparer les deux résultats, même si la deuxième méthode est indéniablement «la bonne».
- L'usage de formule (T18) de trigonométrie permet d'exprimer le numérateur de l'expression de f_{19} en un réel x uniquement en fonction de $\cos(2x)$. La fonction f_{19} apparaît alors sous la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
- Utilisez la technique introduite dans la troisième question de l'exercice 11 et développée dans l'exercice 47 afin d'écrire l'expression de f_{20} comme la somme de deux inverses de fonctions polynomiales de degré 1. Chaque terme de cette somme suit le modèle (PR3) en utilisant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. N'oubliez pas de gérer les valeurs absolues apparaissant dans une primitive de f.
- Utilisez (T20) de trigonométrie pour écrire l'expression de f_{21} en un réel x en fonction de $\cos(2x)$.

Indications pour l'exercice 132

Chaque question de cet exercice est de la même forme. On vous demande de calculer la dérivée d'une fonction f et d'un déduire une primitive d'une fonction g. En pratique, après calcul de f', vous devez réussir à écrire l'expression de cette fonction sous la forme $f' = \lambda g - h$, où h est une fonction dont une primitive est facile à calculer et λ est un réel non nul. En effet, vous noterez alors que $g = \dfrac{1}{\lambda}(f' + h)$ donc qu'une primitive de g est le produit par $1/\lambda$ de la somme de f et d'une primitive de h. Dans les indications qui suivent, je vous aide pour déterminer la fonction h dans certains cas.

- Dans la question 2, la fonction h est constante.
- Dans la question 3, la fonction h est une puissance négative.
- Dans la question 4, la fonction h est de la forme $\dfrac{u'}{u}$.
- Dans la question 5, la fonction h est constante.

Indications pour l'exercice 134

1. On pourra effectuer une **récurrence**.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifiez $\dfrac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2}$ pour trouver une expression de la forme $k \times \dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$ où k est un réel à déterminer. On sait alors que la suite $\left(\dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison k.
3. On rappelle que si une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison k alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = k^n v_0$. Vous devez donc à présent connaître, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de $\dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$ en fonction de n, ce qui vous permet d'exprimer le réel u_n en fonction de n.

Indications pour l'exercice 135

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a $n - 1$ termes communs entre la somme définissant le réel u_{n+1} et celle définissant le réel u_n. La différence $u_{n+1} - u_n$ n'est donc formée que de trois inverses d'entiers. Si cela n'apparaît pas clairement dans le cas général, écrivez in-extenso $u_6 - u_5$ pour réellement visualiser quels termes sont communs et quels termes se simplifient.
2. Si a et b sont deux entiers tels que $b \geqslant a$, il y a exactement $b - a + 1$ entiers compris entre a et b au sens large.

Indications pour l'exercice 137

On pourra effectuer une **récurrence**. Notez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^0 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Cette relation doit vous permettre de montrer que si l'estimation voulue est vraie pour tous les rangs compris entre 1 et un entier n alors $p_{n+1} \leqslant 1 + 2^{(2^n - 1)}$. En comparant cette estimation et celle voulue, vous pourrez conclure que l'assertion voulue est vraie au rang $n + 1$.

Indications pour l'exercice 138

Tout mettre au même dénominateur, développer et identifier est une méthode laborieuse. Il est bien préférable de travailler comme dans la remarque du cours de base page 9 et dans l'exemple qui suit. Sur ce thème, on peut aussi revoir l'exercice 11. En premier lieu, remplacer chaque ? de l'identité suivante par des rationnels explicites afin que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $?(x^2 + 1) + ?(x^2 - 1) = ?$. Par simple division, vous obtiendrez une identité de la forme:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}, \quad \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{?}{x^2 - 1} + \frac{?}{x^2 + 1}$$

Notez que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et appliquez la même méthode au premier terme de la somme de droite de l'identité précédente. Vous pourrez alors conclure presque sans calcul.

Indications pour l'exercice 139

Pour le développement de s^3, on peut travailler en développant $(x + y)(x + y)^2$ ou utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8. Afin de gérer l'application de la dernière question, on rappelle que pour tout réel t, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = 2\cos(t)$. Ceux qui ne se souviennent pas des propriétés de l'exponentielle complexe vues en terminale peuvent aussi anticiper les révisions sur ce thème en lisant la page 35 du cours.

Indications pour l'exercice 140

1. Pour calculer s^2 et t^2, on peut utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8.
2. La transformation de $x^3+y^3+z^3$ est la plus difficile. Utilisez les calculs de la question 1 pour montrer que

$$x^3+y^3+z^3 = s^3-3xy(x+y)-3xz(x+z)-3yz(y+z)-6xyz$$

Notez alors que $3xy(x+y) = 3xy(x+y+z)-3xyz$. En exploitant cette remarque pour les deux autres termes analogues, vous pourrez conclure.

Indications pour l'exercice 141

Notez que pour tout entier k compris entre 1 et n, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Cela doit vous permettre d'écrire S sous la forme d'une somme de termes qui se simplifient deux à deux à quelques exceptions près. Écrire in-extenso tous les termes transformés de S dans le cas où $n=4$ permet de bien comprendre comment se simplifie l'expression générale.

Indications pour l'exercice 142

Notez que pour tout entier k compris entre 2 et n, $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2(k-1)} - \dfrac{1}{2(k+1)}$. Cela doit vous permettre d'écrire S sous la forme d'une somme de termes qui se simplifient deux à deux à quelques exceptions près. Écrire in-extenso tous les termes transformés de S dans le cas où $n=6$ permet de bien comprendre comment se simplifie l'expression générale.

Indications pour l'exercice 144

Une idée de départ consiste à visualiser l'expression comme une expression polynomiale en x, où y est un paramètre. puisque vous savez factoriser $x^2+2x-2\times 2^2$, $x^2+3x-2\times 3^2$, vous allez opérer de même pour $x^2+xy-2y^2$. On peut par exemple mettre l'expression sous forme canonique; sur ce thème, il faut relire les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35. De manière plus astucieuse, vous pourrez trouver un point d'annulation «évident» de la fonction $f : x \mapsto x^2+xy-2y^2$. La technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16 permet alors de conclure presque sans calcul.

Indications pour l'exercice 145

Vous serez sans doute conduit à développer le carré d'une somme. Pour ce faire, il est efficace d'exploiter l'astuce présentée et mise en œuvre dans le corrigé de l'exercice 8.

Indications pour l'exercice 146

1. L'objectif est de minorer la fonction $f : x \mapsto (3x^2-x-1)-x$. Pour ce faire, il suffit de mettre l'expression de f sous forme canonique, en exploitant les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35.
2. Vous pourrez procéder par **récurrence** en exploitant le résultat d la question 1 pour gérer l'hérédité.
3. Notez que la suite $(u_0+2n/3)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Indications pour l'exercice 147

1. Vous noterez que l'expression manipulée est la différence de deux carrées donc s'écrit comme un produit. Chaque facteur de ce produit est lui-même la différence de deux carrés.
2. Vous justifierez que $d+r-1>0$ et $d+r+1>0$. Le réel $4d^2-(d^2-r^2+1)^2$ a donc le même signe que $(1+r-d)(1-r+d)$. On peut alors conclure en se souvenant qu'un produit est positif si et seulement si ses deux facteurs sont de même signe.

Indications pour l'exercice 148

1. Distinguez deux cas en fonction du classement de x et y.
2. En observant comment le calcul de la question 1 s'articule, vous modifierez très légèrement la formule de cette question pour conclure.

Indications pour l'exercice 149

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Travailler en distinguant plusieurs cas suivant le signe de x, y et $x + y$ est pénible car la connaissance du signe des réels x et y ne permet pas toujours de conclure quant au signe de $x + y$, ce qui conduit à diviser certains cas en sous-cas. Exploitez plutôt le fait que pour tout réel x et tout réel positif r, $|x| \leqslant r$ si et seulement si $x \leqslant r$ et $-x \leqslant r$.

Indications pour l'exercice 150

1 • Vous pourrez noter que $3a = (a - b) + (a - c)$.

2 • Écrivez le résultat de la première question pour les triplets (a, b, c), (b, c, a) et (c, a, b).

Indications pour l'exercice 151

Pour optimiser le calcul de la deuxième question, vous pourrez transformer l'expression de f en suivant la technique présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. Dans la troisième question, pensez à utiliser la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72.

Indications pour l'exercice 152

La fonction proposée est une forme indéterminée. Il faut transformer l'écriture de son expression afin que le signe $-$ qui est la source du problème, soit transformé en signe $+$. Utilisez la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72. Pour conclure, mettez en facteur le «terme prépondérant» au numérateur et au dénominateur de l'expression obtenue.

Indications pour l'exercice 153

Chaque question de cet exercice consiste à établir une ou plusieurs identités qui sont des inégalités. Vous trouverez des exemples de telles preuves dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode de base consiste à fixer les variables puis à écrire l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison sous une forme telle que son signe soit clair (forme factorisée, somme de carrés...)

2 • La technique rappelée en préambule doit vous conduire à développer l'expression

$$\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}\right)(aa' + bb' + cc') - (a + b + c)^2$$

pour en regrouper les termes d'une autre manière montrant ainsi qu'elle est positive. Pour développer efficacement le dernier carré, vous pourrez exploiter la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8. Pour conclure, écrivez cette expression sous la forme de la somme de trois termes, chacun étant le produit de deux des six réels a, b, c, a', b', c' et d'une expression de la forme celle étudiée dans la première question. La première déduction vous conduira à établir que pour tout $(a, b, c, a', b', c') \in (\mathbb{R}^{+*})^6$ vérifiant $2(a + b + c)^2 \geqslant 3(aa' + bb' + cc')$,

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} \geqslant \frac{3}{2}$$

Pour établir la dernière identité, choisissez $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ et appliquez la formule précédente aux six réels a, b, c, $b + c$, $c + a$ et $a + b$. La principale difficulté est de vérifier que ces réels remplissent les contraintes permettant d'utiliser la formule précédemment prouvée. En particulier, vous devez vérifier que $2(a+b+c)^2 - 3\big(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)\big)$ est positif. Pour ce faire, développez cette expression et regroupez les termes obtenus pour l'écrire comme la somme de trois carrés.

3 • Cette question est très semblable à la précédente. Il est inutile de la chercher avant d'avoir trouvé la question 2, quitte à avoir étudié son corrigé.

Indications pour l'exercice 154

2 • La méthode standard de preuve d'identités qui sont des inégalités consiste à fixer les variables puis à écrire l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison afin de déterminer facilement son signe (forme factorisée, somme de carrés...); vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. Mais dans cet exercice, il est vraisemblable que la question 1 nous donne l'expression factorisée utile. Développez donc cette expression pour faire apparaître celle qui nous intéresse.

3 • Notez que $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ et $\frac{c}{d}$ appartiennent à $]0\,;1]$. Appliquez alors le résultat de la question précédente.

Indications pour l'exercice 155

Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. On connaît alors le signe et les points d'annulation de l'expression factorisée, ce qui permet d'établir l'identité et de préciser les cas d'égalité.

Indications pour l'exercice 156

Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode consiste à fixer les variables puis à écrire l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison sous une forme telle que son signe soit clair (forme factorisée, somme de carrés...) Notez en particulier qu'une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nulle; cette remarque permet d'étudier le cas d'égalité.

Indications pour l'exercice 157

Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Dans notre cas, afin de faire «disparaître» les racines carrées, on compare les carrés des réels manipulés. Autrement dit, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on étudie

$$\left(\sqrt{\frac{x+y}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$$

Indications pour l'exercice 158

1. Pour gérer cette première question, vous pourrez utiliser deux méthodes.
   - Vous pourrez juste mener un travail d'encadrement précis. Vous devrez alors utiliser la transformation présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. Pour revoir les fautes à éviter, relisez le corrigé de l'exercice 38.
   - Vous pourrez considérer que cette question consiste à établir deux identités fondées sur des inégalités. Pour gérer ce problème, vous pourrez relire les exemples de la cinquième leçon et les corrigés des exercices 25, 26 et 53.
2. Procédez par **récurrence**.
3. L'objet de cette question est encore d'établir une identité fondée sur une inégalité; on travaille donc comme dans la première question. Vous serez alors amené à factoriser une expression polynomiale de degré 2. Pour être efficace, vous réviserez la technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16.
5. Notons L la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En exploitant les renseignements des questions 2 et 4, vous pourrez montrer que $L \in [2\,;3]$. Déterminez alors la limite des suites $\left(\frac{5u_n-3}{u_n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de L; prenez garde à la question de l'existence d'une limite pour un quotient de deux suites. La formule définissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vous permettra alors de trouver une relation sur L et l'encadrement de ce réel vous permettra de conclure.
6. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-3} = 2 \times \frac{u_n-1}{u_n-3}$.

   Votre cours sur les suites géométriques vous permettra alors de donner une expression explicite du réel $\frac{u_n-1}{u_n-3}$ en fonction de l'entier n, dont vous pourrez tirer une expression explicite des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette dernière est une forme indéterminée; en mettant en facteur le «terme prépondérant» au numérateur et au dénominateur de cette expression, vous retrouverez la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indications pour l'exercice 159

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'exercice consiste à étudier le signe d'une **expression polynomiale** du second degré «en e^{3x}», qu'il suffit de mettre sous forme canonique, en exploitant les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35.

Indications pour l'exercice 160

Dans la première question, il peut être judicieux de montrer en premier lieu de $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ lorsque x est un réel fixé, afin de prouver que les expressions manipulées sont correctement définies. Pour ce faire, comparez $\sqrt{1+x^2}$ et $|x|$ et utilisez le fait que $|x| \geqslant -x$. Dans tout l'exercice prenez garde au fait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{y^2}$ n'est pas égal à y mais à $|y|$; il y a donc des signes à étudier pour se «débarrasser» des valeurs absolues inopportunes.

Indications pour l'exercice 161

Dans tout l'exercice prenez garde au fait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{y^2}$ n'est pas égal à y mais à $|y|$. Il y a donc des signes à étudier pour se «débarrasser» des valeurs absolues inopportunes.

Indications pour l'exercice 163

En écrivant les arguments des logarithmes sous la forme d'une seule fraction puis en utilisant la formule [LN1], vous écrirez le terme général de la suite étudiée sous la forme du logarithme d'un quotient dont l'expression se simplifie grandement. Testez ce calcul avec une valeur de n explicite, par exemple 5, pour pouvoir écrire tous les termes de la somme formant le terme d'indice n de la suite; cela vous permettra de réellement comment se simplifie l'expression manipulée.

Indications pour l'exercice 164

Il faut en premier lieu encadrer x^2; on pourra revoir le corrigé de l'exercice 37 sur ce sujet. On peut ensuite encadrer le numérateur et le dénominateur de A avant de conclure. Cette méthode n'est pas très efficace mais peut être employée, ne serait-ce que pour voir si vous savez éviter les pièges. Mais pour optimiser les calculs, il vaut mieux transformer l'expression de A en suivant l'idée présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47.

Indications pour l'exercice 165

Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrez avant tout que $\sqrt{1+t^4} \geqslant t^2$, inégalité que l'on nomme (1). Vous en déduirez entre autre l'estimation de gauche de l'encadrement. Pour établir l'estimation de droite, mettez au même dénominateur les fractions de l'expression

$$1 - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}$$

puis transformez l'expression obtenue à l'aide la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72. Pour conclure, il vous restera à justifier, en exploitant à nouveau la formule (1), que

$$\sqrt{1+t^4}\left(\sqrt{1+t^4}+t^2\right) \geqslant 2t^4$$

Indications pour l'exercice 166

- Pour établir les estimations des deux premières questions, on doit comparer une différence D de racines carrées et l'inverse d'une racine carrée R. La méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72 permet de transformer la différence D en l'inverse d'une somme de racines carrées. Il reste à comparer cette somme et R pour conclure.
- La première question assure par exemple que $\sqrt{2}-\sqrt{1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1}}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\sqrt{4}-\sqrt{3} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\sqrt{5}-\sqrt{4} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{4}}$.
En ajoutant ces quatre estimations, on obtient

$$\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

et beaucoup de termes se simplifient dans le membre de gauche de l'estimation qui précède. Généraliser cette observation vous permettra d'encadrer la somme proposée entre $\sqrt{10001}-1$ et $\sqrt{10000}$. Un calcul numérique approché de $\sqrt{10001}-1$ vous permettra alors de conclure

Indications pour l'exercice 167

2 . L'objet de cette question est de prouver deux identités fondées sur des inégalités. La méthode standard de ce type de preuve qui consiste à fixer les variables puis à transformer l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison de telle sorte qu'elle soit clairement positive (expression factorisée, somme de carrés...) est ici à proscrire. En effet, d'une part les expressions à manipuler combinent des **expressions rationnelles** et des logarithmes, que l'on ne sait pas manipuler conjointement. D'autre part, il est vraisemblable que la question 1 nous donne l'estimation utile pour conclure. Il suffit de l'appliquer à des réels bien choisis lorsque $x \in [0\,;1[$. Je souligne aussi que l'estimation de gauche voulue s'écrit aussi
$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \leqslant -\frac{x}{x-1}$$

3 . Appliquez la formule de la deuxième question en un réel pertinent. Il pourra être utile d'étudier le signe du réel
$$\frac{10^{-7}}{10^{-7}-1} + 10^{-7} + 10^{-13}$$
par exemple en mettant au même dénominateur tous les termes qui le composent.

4 . Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Pour montrer que $|a| \leqslant b$, il suffit de montrer que $-b \leqslant a$ et $a \leqslant b$

5 . On sait que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; on pourra par exemple étudier l'exercice 149. En particulier, si m et n sont deux entiers naturels plus petits que 69, on sait que
$$\begin{aligned}&\left|\ln(0{,}99^n) + \ln(0{,}9995^m) + \frac{n(2p+1)}{2}\,10^{-7} + \frac{m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right| \\ \leqslant\ &\left|\ln(0{,}99^n) + \frac{n(2p+1)}{2}\,10^{-7}\right| + \left|\ln(0{,}9995^m) + \frac{m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right|\end{aligned}$$
Il suffit d'utiliser les estimations de la question 4 pour majorer chaque terme de la somme de droite de la relation précédente et conclure. Cette technique est bien plus efficace que de travailler par encadrement en faisant «disparaître» les valeurs absolues à l'aide de la formule [V4].

Indications pour l'exercice 168

En utilisant la formule de trigonométrie [T1], vous montrerez que les réels cherchés sont les réels appartenant à l'intervalle $[0\,;3\pi]$ dont le sinus vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vous pourrez alors travailler sur un cercle trigonométrique comme expliqué dans les indications de l'exercice 43.

Indications pour l'exercice 169

Considérez un réel t appartenant à $]-\pi/2\,;\pi/2[$ vérifiant la relation (R): $\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \sqrt{3}$ et montrez en exploitant la formule de trigonométrie [T1] que le cosinus de ce réel est nécessairement $\frac{1}{2}$. En travaillant alors sur un cercle trigonométrique comme expliqué dans les indications de l'exercice 43, vous trouverez des contraintes sur les réels vérifiant la relation (R). Pour conclure, Il suffit de tester dans la relation (R) tous les réels vérifiant la contrainte déterminée pour ne retenir que les solutions au problème. Pour mieux comprendre la logique de cet exercice, vous pouvez lire la définition de ce qu'est une **condition nécessaire**.

Indications pour l'exercice 170

- Considérez un réel t appartenant à $[0\,;2\pi]$ vérifiant la relation (R): $\sin(t) - \cos(t) = \sqrt{2}$. En élevant (R) au carré et en exploitant les formules de trigonométrie [T1] et [T21], montrez que le sinus de $2t$ est nécessairement -1. Vous trouverez ainsi les réels t qui peuvent vérifier la relation (R). Pour conclure, Il suffit de tester dans la relation (R) tous les réels ainsi déterminés pour ne retenir que les solutions au problème. Pour mieux comprendre la logique de cet exercice, vous pouvez lire la définition de ce qu'est une **condition nécessaire**.
- Vous pourrez réfléchir à une autre solution permettant de travailler par **conditions nécessaires et suffisantes**. En effet la relation (R) est équivalente à
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos(t) = 1$$
En relisant les formules [T14] à [T17] et en se remémorant les valeurs des sinus et des cosinus d'angles particuliers, vous pourrez transformer cette écriture en une équation qui est l'égalité d'un sinus et d'un nombre ou d'un cosinus et d'un nombre, dont la résolution est immédiate.

Indications pour l'exercice 171

Soit $x \in [0\,;2\pi]$. Utilisez la formule [T20] pour montrer que $\sin(x) - \cos(2x)$ est une **expression polynomiale** du second degré «en $\sin(x)$». Factorisez efficacement cette expression à l'aide de la technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16. En vous souvenant de la localisation des valeurs prises par la fonction sinus, vous pourrez alors résoudre le problème en cherchant les réels appartenant à $[0\,;2\pi]$ en lesquels sinus prend la valeur -1 et en déterminant les réels appartenant à $[0\,;2\pi]$ dont le sinus est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$. Pour ce faire, travailler sur un cercle trigonométrique comme expliqué dans les indications de l'exercice 43.

Indications pour l'exercice 172

Fixez $x \in \,]0\,;\pi/2[$ puis montrez la formule voulue par **récurrence**, à l'aide de la formule de trigonométrie [T21].

Indications pour l'exercice 173

1. Développez chaque carré apparaissant dans l'expression manipulée. Pour le premier carré, utilisez la formule [M1] pour écrire que $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}$. Après développement, vous pourrez faire apparaître la partie réelle de $\overline{z}\,z'$ en utilisant la formule [C9]. Enfin les formules [M3] et [M4] vous permettront de transformer $|z||z'|$ en $|\overline{z}\,z'|$.
2. Soit u un complexe. Exprimer $|u|^2 - \big(\mathrm{Re}(u)\big)^2$ en fonction le la partie réelle et de la partie imaginaire de u vous permettra de conclure. Prendre cependant garde au fait que si y est un réel $\sqrt{y^2}$ n'est pas égal à y mais à $|y|$.
3. Appliquez la formule de la question 2 au complexe $\overline{z}\,z'$.

Indications pour l'exercice 174

1. Justifiez que $\mathrm{Re}(v) = \mathrm{Re}(z) + |z|$. Montrez alors que $|z| \geqslant \big|\mathrm{Re}(z)\big|$ en comparant les carrés de ces nombres. En utilisant une propriété de la valeur absolue, vous pourrez en déduire que $\mathrm{Re}(v) \geqslant 0$. Pour montrer que $\mathrm{Re}(v) > 0$, vous pourrez procéder par l'absurde. En effet, supposer que la partie réelle de v est nulle permet de montrer d'une part que la partie imaginaire de z est nulle et d'autre part que la partie réelle de z est négative; pensez à réutiliser l'expression de $\mathrm{Re}(v)$ en fonction de z.
2. Utilisez la formule [C9] pour montrer que $2\mathrm{Re}(v) = z + \overline{z} + 2|z|$.

Indications pour l'exercice 175

On relira les indications et le corrigé de l'exercice 58 pour connaître les complexes écrits sous forme algébrique dont la forme trigonométrique est connue, et savoir optimiser les calculs d'expressions algébriques mettant en jeu des complexes en fonction de la forme de l'écriture de ces derniers.

Indications pour l'exercice 176

- Si vous relisez les indications et le corrigé de l'exercice 58 pour connaître les complexes écrits sous forme algébrique dont la forme trigonométrique est connue, il vous paraîtra naturel d'écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique. Cette écriture permet de calculer immédiatement la forme trigonométrique de $(1+\mathrm{i})^n$ donc aussi sa forme algébrique. L'expression obtenue se simplifie de manière différente suivant que n est de la forme $4p$, $4p+1$, $4p+2$ ou $4p+3$; c'est pourquoi l'énoncé demande de distinguer quatre cas suivant que le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1, 2 ou 3. Mais ces simplifications sont assez laborieuses.
- Si vous n'êtes pas tenté par toutes les manipulations qui précèdent – mais les faire vous entraînerait au calcul – déterminez la forme algébrique $(1+\mathrm{i})^4$. Vous pourrez alors retrouver presque directement les différents résultats en notant que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier naturel r au plus égal à 3,

$$(1+\mathrm{i})^{4p+r} = \big((1+\mathrm{i})^4\big)^p (1+\mathrm{i})^r$$

- Le cas de $(1+\mathrm{i})^{-n}$ est très analogue puisque ce nombre n'est que $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^n$

Indications pour l'exercice 177

1. Développer $e^{-i(\theta+\theta')/2}\left(e^{i\theta}+e^{i\theta'}\right)$ doit vous permettre de faire apparaître le cosinus de la deuxième formule sous la forme préconisée par la première formule.
2. Vous devriez trouver $e^{i\theta}-e^{i\theta'}=2\sin\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i(\theta+\theta'+\pi)/2}$.
3. Vous noterez que $1=e^{0i}$ et $i=e^{i\pi/2}$. Vous devez donc pouvoir écrire chacun des complexes de cette question sous la forme de la somme ou de la différence de deux exponentielles complexes, ce qui vous permettra d'appliquer les formules des questions 1 et 2. Allez aussi relire les indications et le corrigé de l'exercice 58 pour savoir optimiser les calculs d'expressions algébriques mettant en jeu des complexes en fonction de l'écriture de ces derniers. Vous saurez ainsi quand effectuer les élévations au cube dans les divers exemples.

Indications pour l'exercice 178

1. Par choix de z, vous savez que $\left(re^{i\theta}\right)^2+\overline{\left(re^{i\theta}\right)^2}+\left(re^{i\theta}\right)^3=0$. Les relations de la remarque technique qui suit les formules [EC1] à [EC4] à la page 35 du document de base doivent vous permettre de transformer cette identité en l'identité voulue.
2. Vous déduirez de la relation établie dans la question 1 que $e^{3i\theta}$ est un réel, ce qui vous permettra de localiser 3θ donc θ.
3. Pour chaque valeur de θ, la relation établie dans la question 1 vous permet de déterminer r. Je rappelle ici que $r>0$. En écartant les cas conduisant à une contradiction, il ne doit rester que trois valeurs possibles pour le couple (r,θ) qui donnent les trois complexes susceptibles de vérifier la relation initiale.
4. Dans les trois premières questions, on a travaillé par **conditions nécessaires** et trouvé des contraintes fortes sur les complexes pouvant vérifier la relation initiale. L'objectif de cette question est de tester chacun des complexes remplissant les contraintes déterminées en vérifiant effectivement que si $z=-2$ ou $z=e^{2i\pi/3}$ ou $z=e^{-2i\pi/3}$ alors $z^2+\overline{z}^2+z^3=0$.

Indications pour l'exercice 179

Pour développer le cube de la somme de deux nombres de manière efficace dans toutes les questions de cet exercice, vous pourrez utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8.

3. Dans cette question l'équation (F) est $y^2-9y+8=0$ d'inconnue complexe y. Notez qu'une solution est évidente; la technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16 permet de trouver la deuxième solution sans calcul. Choisissez alors une solution y de (F) et posez

$$\begin{cases} x_1 = y+\dfrac{p}{3y} \\ x_2 = yj+\dfrac{p}{3yj} \\ x_3 = yj^2+\dfrac{p}{3yj^2} \end{cases}$$

La première question assure que les complexes x_1, x_2 et x_3 sont trois solutions potentielles de (E); pour conclure, il faut effectivement vérifier que $x_1^3-6x_1-9=0$, $x_2^3-6x_2-9=0$ et $x_3^3-6x_3-9=0$. Pour effectuer tous les calculs, écrivez les complexes x_2 et x_3 sous la forme $aj+bj^2$ où a et b sont des réels. Souvenez-vous aussi que $j^3=1$. Vous en déduirez entre-autre que

- Les complexes j et j^2 sont inverse l'un de l'autre
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $j^n=j^r$ où r est le reste de la division euclidienne de n par 3. Par exemple $j^{14}=(j^3)^4j^2=j^2$.

4. Dans cette question l'équation (F) est $y^2-104y+17^3=0$ d'inconnue complexe y. Vous vérifierez que $(4+i)^3$ est une des solutions de (F). On pose alors

$$\begin{cases} x_1 = 4+i+\dfrac{p}{3(4+i)} \\ x_2 = (4+i)j+\dfrac{p}{3(4+i)j} \\ x_3 = (4+i)j^2+\dfrac{p}{3(4+i)j^2} \end{cases}$$

La première question assure que les complexes x_1, x_2 et x_3 sont trois solutions potentielles de (E). Des calculs assez laborieux permettent de trouver des expressions simples de ces solutions potentielles qui sont des réels; n'oubliez pas les propriétés de j soulignées dans la question précédente. Comme dans la question précédente, il faut vérifier effectivement que ces complexes sont des solutions de (E). Trois autres calculs, eux aussi assez lourds mais sans astuce, permettent de conclure.

Indications pour l'exercice 180

La formule [ER1] permet d'écrire le terme général de la suite étudiée comme l'exponentielle d'une somme que l'on sait effectivement calculer à l'aide de la formule [S5]. Je souligne en effet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Indications pour l'exercice 181

2 • Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Utilisez l'encadrement établi dans la première question avec les réels $1 + \frac{1}{p}$ et $1 - \frac{1}{p+1}$.

3 • La question 2 assure en particulier que $\ln(2) - \ln(1) \leqslant \frac{1}{1}$ et $\ln(3) - \ln(2) \leqslant \frac{1}{2}$ et $\ln(4) - \ln(3) \leqslant \frac{1}{3}$ et $\ln(5) - \ln(4) \leqslant \frac{1}{4}$. En ajoutant ces quatre estimations, on obtient

$$\ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \ln(5) - \ln(4) \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

et beaucoup de termes se simplifient dans le membre de gauche de l'estimation qui précède. Généraliser cette observation vous permettra de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\ln(n) \leqslant u_n - \frac{1}{n}$. En travaillant de même avec l'autre partie de l'encadrement de la question 2, vous établirez que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n - 1 \leqslant \ln(n)$.

4 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $v_n = u_n - \ln(n)$. Montrez à l'aide de la question 3 que tous les termes de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ appartiennent à $[0\,;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiez que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

Exploitez alors la question 2 pour déterminer le sens de variations de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Vous pourrez alors conclure.

Indications pour l'exercice 182

1 • Vous pourrez revoir la rédaction d'une identité fondée sur une inégalité dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, même dans les cas très simples comme celui de cette question.

2 • La question 1 assure en particulier que $\frac{1}{2^2} \leqslant \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3^2} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4^2} \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5^2} \leqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$. En ajoutant ces quatre estimations, on obtient

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \leqslant \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

et beaucoup de termes se simplifient dans le membre de droite de l'estimation qui précède. Généraliser cette observation vous permettra de conclure.

3 • Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 2.

Indications pour l'exercice 183

• Soit $k \in \mathcal{A}$. Par définition pour tout $p \in \mathcal{A}$, $b_p = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{n-1} a_r \exp\left(\frac{2\mathrm{i}rp\pi}{n}\right)$.

Ce changement de «lettre muette» va vous permettre de substituer sans erreur cette expression de $b_0, \dots, b_{n-1}$ dans la somme qui suit et d'obtenir

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \left(a_r \sum_{p=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right)\right)^p\right)$$

Le calcul est délicat. Il va vous falloir utiliser plusieurs fois la formule [S2] pour «entrer» ou «sortir» d'une somme tout facteur qui ne dépend pas de l'indice de la somme considérée et la formule [EC1] pour rassembler les exponentielles complexes. Le cœur du calcul est la possibilité d'échanger les deux sommes. Plus précisément, si $(a_{p,r})_{(p,r) \in \mathcal{A}^2}$ est une famille de n^2 complexes indicée par les couples d'entiers appartenant à $\mathcal{A}^2$

$$\sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_{p,r}\right) = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_{p,r}\right)$$

Si vous n'êtes pas convaincu par cette manipulation, écrivez explicitement tous les termes des deux membres de l'égalité précédente pour une valeur raisonnable de n, par exemple 3 ou 4 et vous verrez que vous écrivez exactement les mêmes sommes à l'ordre près des termes.

- Pour continuer le calcul, il va falloir simplifier l'expression de la somme «interne» du membre de droite de la dernière identité. Soit donc $r \in \mathcal{A} \setminus \{k\}$. Vous vérifierez que le réel $\dfrac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}$ appartient à $]-2\pi\,;2\pi[\setminus\{0\}$ donc que l'exponentielle du produit de ce réel par i ne vaut pas 1. Vous pourrez en déduire à l'aide de [S5] que

$$a_r \sum_{p=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n} \right) \right)^p = 0$$

  et pourrez enfin conclure cet exercice.

Indications pour l'exercice 184

Pour développer le cube de la somme de deux nombres de manière efficace, vous pourrez utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8. La racine rationnelle à trouver est $\dfrac{1}{2}$.

Indications pour l'exercice 185

1. Pour être efficace dans les calculs, écrivez f sous la forme d'une puissance et appliquez la formule [D5] du cours en utilisant comme fonction u la fonction $x \mapsto x+a$. Après les quatre premiers calculs, vous pourrez conjecturer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$,

$$f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p)}{(x+a)^{p+1}}$$

   Montrez alors cette conjecture par **récurrence**.
2. Ramenez-vous à la question précédente en transformant l'expression de g à l'aide de la technique présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. Vous conclurez en notant que les formules [D1] et [D2] assurent que, tant que les calculs ont un sens, pour toute fonction u et v et tout nombre a, $(u+v)^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$ et $(a \times u)^{(k)} = a \times u^{(k)}$.

Indications pour l'exercice 186

1. Rappelez-vous que par définition même, la dérivée d'une primitive d'une fonction u est la fonction u elle-même.
2. Une fonction définie et dérivable sur un intervalle, de dérivée ne prenant que la valeur 0, est constante.
4. On cherche les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $f'(x) - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) f(x) = \mathrm{e}^x$. Suivez scrupuleusement le plan de résolution établi dans les trois premières questions. Les calculs seront d'autant moins pénible que vous simplifierez les exponentielles apparaissant. Pour ce faire, vous pourrez revoir l'exercice 29.

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 72

1 • $F_1 = \frac{6}{18} - \frac{3}{18} - \frac{22}{18} = -\frac{19}{18}$.

2 • On commence par regrouper les fractions ayant les mêmes dénominateurs au cas où se produit une simplification, ce qui est le cas avec les fractions de la deuxième parenthèse.

$$F_2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{3}{15} + \frac{2}{15}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

3 • $F_3 = \frac{4+3}{12} \times \frac{8-9}{24} = -\frac{7}{288}$.

4 • On commence par simplifier les données et par regrouper les fractions ayant les mêmes dénominateurs au cas où se produit une simplification, ce qui est systématiquement le cas

$$F_4 = \left(-\frac{13}{20} - \frac{7}{20}\right) - \frac{4}{5} + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right) + \frac{5}{7} = -1 - \frac{4}{5} - \frac{3}{2} + \frac{5}{7} = \frac{-70 - 56 - 105 + 50}{70} = -\frac{181}{70}$$

La fraction est bien irréductible puisque 181 n'est divisible ni par 2, ni par 5, ni par 7.

5 • Comme $48 = 6 \times 8$ et $42 = 6 \times 7$, on choisit comme dénominateur commun $6 \times 8 \times 7$ soit 336. On obtient

$$F_5 = \frac{49 - 40}{6 \times 7 \times 8} = \frac{3}{2 \times 7 \times 8} = \frac{3}{112}$$

Notez que le dénominateur a été laissé sous forme d'un produit; les simplifications éventuelles sont ainsi bien plus visibles. On n'effectue le produit des facteurs du dénominateur qu'après avoir simplifié la fraction finale.

6 • $F_6 = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{2}{4}}{\frac{2}{6} - \frac{3}{6}} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{1} = \frac{3}{2}$. N'oubliez pas de simplifier la fraction finale.

7 • $F_7 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 + 3 \times 4 \times 5 + 4 \times 5 + 5 + 1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{120 + 60 + 20 + 5 + 1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{206}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{103}{3 \times 4 \times 5} = \frac{103}{60}$ Notez que le dénominateur a été laissé sous forme d'un produit; les simplifications éventuelles sont ainsi bien plus visibles. On n'effectue le produit des facteurs du dénominateur qu'après avoir simplifié la fraction finale.

8 • Ne pas oublier de simplifier les données avant de commencer le calcul.

$$F_8 = \frac{1 + \frac{3}{32} + \frac{5}{8}}{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{32 + 3 + 20}{32}}{\frac{6 - 8 + 1}{8}} = \frac{55}{32} \times \frac{8}{-1} = -\frac{55}{4}$$

9 • Comme la somme des chiffres de 51 est divisible par 3, il en est de même de 51. On vérifie alors que $51 = 3 \times 17$, ce qui permet de choisir un dénominateur pertinent pour les termes formant le numérateur de F_9

$$F_9 = \frac{17 - 1}{3 \times 17} \times \frac{9}{4} = \frac{16}{17} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{17} \times 3 = \frac{12}{17}$$

Correction de l'exercice 73

- $F_1 = \frac{a(a+b) - (a-b)b}{b(a+b)} = \frac{a^2 + b^2}{ab + b^2}$
- $F_2 = \dfrac{\frac{ab+1}{a}}{\frac{ab+1}{b}} = \frac{ab+1}{a} \times \frac{b}{ab+1} = \frac{b}{a}$
- $F_3 = \frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

- $F_4 = \dfrac{a(a+1)+(a+1)(a-1)+a(a-1)}{a(a+1)(a-1)} = \dfrac{3a^2-1}{a^3-a}$
- $F_5 = \dfrac{\dfrac{a-2b}{b}}{\dfrac{2b+a}{2a}} = \dfrac{a-2b}{b} \times \dfrac{2a}{2b+a} = \dfrac{2a^2-4ab}{2b^2+ab}$
- $F_6 = \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{\dfrac{a+1}{a}}} = \dfrac{1}{a+\dfrac{a}{a+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{a(a+1)+a}{a+1}} = \dfrac{a+1}{a(a+1)+a} = \dfrac{a+1}{a^2+2a}$
- $F_7 = 1-\dfrac{\dfrac{(a+b)-a}{a+b}}{\dfrac{a+b-a}{a}} = 1-\dfrac{\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{b}{a}} = 1-\dfrac{b}{a+b}\times\dfrac{a}{b} = 1-\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{(a+b)-a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b}$

Correction de l'exercice 74

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{-2/3\}$, $\dfrac{2x}{3+2x} = \dfrac{x}{x+\dfrac{3}{2}}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{3/4\}$, $\dfrac{3+4x}{3-4x} = -\dfrac{x+\dfrac{3}{4}}{x-\dfrac{3}{4}}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\dfrac{2x+1}{3x-3} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{x-1}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{-1/3, 0\}$, $\dfrac{2x+1}{3x+1} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{2x}}{1+\dfrac{1}{3x}}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{3/2\}$, $\dfrac{3x-1}{2x-3} = \dfrac{\dfrac{3}{2}\times(2x-3)+\dfrac{7}{2}}{2x-3}$.

Correction de l'exercice 75

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 4, 17 et 51.

- $A_1 = \dfrac{10^{-7}}{10^6} = 10^{-13}$
- $A_2 = \dfrac{\left(10^{-6}\times 10^{12}\right)^2}{10^{10}} = \dfrac{(10^6)^2}{10^{10}} = \dfrac{10^{12}}{10^{10}} = 10^2$
- $A_3 = \dfrac{10^3\times(10^2)^2}{10^6} = \dfrac{10^3\times 10^4}{10^6} = \dfrac{10^7}{10^6} = 10$
- $A_4 = \dfrac{(10^{-1}\times 10^3)^2\times 10^2}{(10^2\times 10^{-3})^3\times 10^3} = \dfrac{(10^2)^2\times 10^2}{(10^{-1})^3\times 10^3} = \dfrac{10^4\times 10^2}{10^{-3}\times 10^3} = 10^6$

Correction de l'exercice 76

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 5, 17, 28, 39 et 51.

- Les facteurs utiles pour décomposer les entiers mis en jeu sont 2 et 3. On commence par séparer les facteurs 2 et 3 à l'aide de (P3), pour ensuite regrouper les puissances de chaque facteur avec (P1) et (P2).

$$A_1 = \frac{(2^5)^3\times(2^3)^{-2}}{(2^2)^3\times 3^3} = \frac{2^{15}\times 2^{-6}}{2^6\times 3^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

- Les facteurs utiles pour décomposer les entiers mis en jeu sont 2 et 3. On commence par séparer les facteurs 2 et 3 à l'aide de (P3), pour ensuite regrouper les puissances de chaque facteur avec (P1) et (P2).

$$A_2 = \frac{(3\times 2)^{-5}\times\left((2^2\times 3)^3\right)^2}{3^2\times(2^2)^3} = \frac{(3\times 2)^{-5}\times(2^2\times 3)^6}{3^2\times(2^2)^3} = \frac{3^{-5}\times 2^{-5}\times 2^{12}\times 3^6}{3^2\times 2^6} = \frac{2}{3}$$

- Les facteurs utiles pour décomposer les entiers mis en jeu sont 2 et 5. On commence par séparer les facteurs 2 et 5 à l'aide de (P3), pour ensuite regrouper les puissances de chaque facteur avec (P1) et (P2). Notez que $A_3 < 0$ puisque, comme 4 est pair et 7 est impair, $(-5)^4 = 5^4$ et $(-2)^{-7} = -2^{-7}$. Vous prendrez garde à l'utilisation judicieuse des parenthèses.
$$A_3 = -\frac{5^4 \times (2\times 5)^{-5}}{2^{-7}} = -\frac{5^4 \times 2^{-5} \times 5^{-5}}{2^{-7}} = -\frac{2^2}{5} = -\frac{4}{5}$$
- Les facteurs utiles pour décomposer les entiers mis en jeu sont 2 et 3. On commence par séparer les facteurs 2 et 3 à l'aide de (P4), pour mettre les fractions au même dénominateur, puis on regroupe les puissances de chaque facteur avec (P1) et (P2).
$$A_4 = \frac{3^5}{2^5} - 2\times\frac{3^3}{(2^2)^3} = \frac{3^5}{2^5} - 2\times\frac{3^3}{2^6} = \frac{3^5}{2^5} - \frac{3^3}{2^5} = \frac{3^3(3^2-1)}{2^5} = \frac{27\times 8}{2^5} = \frac{27\times 2^3}{2^5} = \frac{27}{2^2} = \frac{27}{4}$$
- Les facteurs utiles pour décomposer les entiers mis en jeu sont 2 et 5. Avant de séparer ces facteurs, on regroupe les puissances de 10 du numérateur et celles de 2 du dénominateur. Puis on sépare les facteurs 2 et 5 à l'aide de (P3), pour ensuite regrouper les puissances de chaque facteur avec (P1) et (P2).
$$A_5 = \frac{10^{-5}\times 10^{21}}{2^{-4}\times 2^{10}} = \frac{10^{16}}{2^6} = \frac{(2\times 5)^{16}}{2^6} = \frac{2^{16}\times 5^{16}}{2^6} = 2^{10}\times 5^{16}$$
Il n'est pas raisonnable de calculer cet entier... pour les curieux, il est plus facile à calculer en l'écrivant $5^6 \times 10^{10}$ et vaut 156250000000000.

Correction de l'exercice 77

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 6 et 39.

- $A_1 = \dfrac{a^{3n} + a^{2n}}{1+a^n} = \dfrac{a^{2n}(a^n+1)}{1+a^n} = a^{2n}$.
- Pour gérer A_2, on fait apparaître les facteurs a, b et $a-b$ puis on utilise (P3) et (P4) pour séparer les puissances de ces facteurs . On regroupe alors les diverses puissances de a, b et $a-b$ avec (P1), pour réécrire le résultat en n'utilisant que des puissances d'ordre positif.
$$A_2 = \frac{a}{b^{1-n}} \times \left(\frac{b-a}{ab}\right)^n \times \left(\frac{a}{a-b}\right)^{n+1} = \left(ab^{n-1}\right)\times\left((-1)^n(a-b)^n a^{-n}\times b^{-n}\right)\times\left(a^{n+1}(a-b)^{-n-1}\right) = \frac{(-1)^n a^2}{b(a-b)}$$
- $A_3 = \dfrac{a^{m+n}\times a^m (b^n)^m}{\dfrac{(a^2)^m}{b^m}\times a^n (b^m)^n} = \dfrac{a^{2m+n}}{a^{2m}b^{-m}\times a^n} = b^m$
- Pour gérer A_4, on fait apparaître les facteurs a, b et $b+1$ puis on utilise (P3) et (P4) pour séparer les puissances de ces facteurs . On regroupe alors les diverses puissances de a, b et $b+1$ avec (P1).
$$A_4 = a^{2n}\times\frac{\left(\dfrac{b+1}{b}\right)^n}{\left(a(1+b)\right)^n} = a^{2n}\times\frac{(b+1)^n}{b^n}\times\frac{1}{a^n(1+b)^n} = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
La dernière transformation est facultative. Son intérêt ne pourrait être justifié que pour certains usages.

Correction de l'exercice 78

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2/3\}$, $\dfrac{2}{(3x+2)^2} = \dfrac{2}{\left(3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\right)^2} = \dfrac{2}{3^2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{2}{9}}{\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2}$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2/3\}$, $\dfrac{2}{(3x+2)^2} = \dfrac{2}{\left(2\left(\dfrac{3x}{2}+1\right)\right)^2} = \dfrac{2}{2^2\left(\dfrac{3x}{2}+1\right)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{3x}{2}+1\right)^2}$
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{(2x+1)^2}{(3x^2+1)^3} = \dfrac{\left(2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)^2}{\left(3\left(x^2+\dfrac{1}{3}\right)\right)^3} = \dfrac{2^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}{3^3\left(x^2+\dfrac{1}{3}\right)^3} = \dfrac{4}{27}\times\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2+\dfrac{1}{3}\right)^3}$.
4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x^2+x^3)^3 = \left(x^2(1+x)\right)^3 = (x^2)^3(1+x)^3 = x^6(1+x)^3$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1-2x}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{8}{27}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\left(\frac{x-2}{x^2+2}\right)^3 = \left(\frac{x(1-2x^{-1})}{x^2(1+2x^{-2})}\right)^3 = \left(x^{-1}\times\frac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3 = (x^{-1})^3\times\left(\frac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3 = x^{-3}\times\left(\frac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3$$

Correction de l'exercice 79

- $A_1 = 2x^2 + 3xy - 2y^2$
- $A_2 = 6 + 13x + x^2 - 2x^3$
- $A_3 = 5x^2 + 4y^2 - 4x^2y^2 - 1$
- Vous pourrez revoir la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer plus efficacement A_4 et trouver
$$A_4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
- En anticipant sur la troisième leçon et en utilisant (IR3) pour être plus efficace, on trouve
$$A_5 = -(x-y+1)(x-y-1) = -\big((x-y)^2-1\big) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$$
- On place avant tout $\frac{1}{4}$ en facteur pour éviter la gestion des fractions. En revanche, n'oubliez pas de simplifier le résultat final.
$$A_6 = \frac{1}{4}\big((1-2x)^2 + (1+2y)^2 - 4(x-y)^2\big) = \frac{8xy - 4x + 4y + 2}{4} = \frac{4xy - 2x + 2y + 1}{2}$$

Correction de l'exercice 80

1. La considération du terme en x^2 permet de déterminer le premier rationnel cherche. La considération du terme en x permet de trouver le deuxième rationnel cherché. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{C}$,
$$2x\left(-\frac{3x}{2}-1\right) + 3x\left(x+\frac{1}{3}\right) + x = 0$$
2. On utilise ici la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 3 et mise en œuvre dans les exercices 11 et 47. Pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$,
$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$
3. On utilise ici la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 11 et mise en œuvre dans l'exercice 47. Soit $x \in \mathbb{C}\setminus\{1/2, -1\}$.
$$\begin{aligned} & 2(x+1) - (2x-1) = 3 \\ \text{donc} \quad & \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(x+1)(2x-1)}. \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{(x+1)(2x-1)} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3(2x-1)}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 81

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 10.

1. Le terme en x de $(2x-3)(4-x)$ est obtenu dans deux produits du développement: celui de $2x$ par 4 et celui de -3 par $-x$. Ce terme est donc $11x$.
2. Le terme en x de $(2x+1)(x-3)(3x-1)$ est obtenu dans trois produits du développement: celui de $2x$ par -3 par -1, celui de 1 par x par -1 et celui de 1 par -3 par $3x$. Ce terme est donc $-4x$.
3. Le terme en en x^3 de $(x+1)(x^2+2x+1)(4x^2+1)$ est obtenu dans trois produits du développement: celui de x par x^2 par 1 et celui de x par 1 par $4x^2$ et celui de 1 par $2x$ par $4x^2$. Ce terme est donc $13x^2$.
4. Le terme en x^2 de $(2x-1)(3x^2+ax+1)$ est obtenu dans deux produits du développement: celui de $2x$ par ax et celui de -1 par $3x^2$. Ce terme est donc $(2a-3)x^2$.
5. Le produit considéré est $(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$. Il faut choisir une lettre par parenthèse et ne jamais choisir la même lettre; il y a donc autant de choix que de manière d'écrire les entiers $1, 2, 3$ dans un ordre quelconque, l'ordre $3, 1, 2$ représentant le choix de la troisième lettre dans la première parenthèse, de la première dans la deuxième parenthèse et de la deuxième dans la troisième parenthèse. Il y a donc en tout six choix. Finalement, le terme en xyz de $(x+y+z)^3$ est $6xyz$

Correction de l'exercice 82

Pour revoir des exemples de calcul du type demandé, vous pourrez relire les corrigés des exercices 14, 35 et 45.

- $A_1 = (x+2)^2 - 4 + 1 = (x+2)^2 - 3$
- $A_2 = (2x)^2 + 5x - 2 = \left(2x + \dfrac{5}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 2 = \left(2x + \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{57}{16}$
- $A_3 = -\big((3x)^2 + x - 3\big) = -\left(\left(3x + \dfrac{1}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 - 3\right) = -\left(3x + \dfrac{1}{6}\right)^2 + \dfrac{109}{36}$
- L'expression A_4 est déjà sous forme canonique!
- $A_5 = (2x)^2 + x = \left(2x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(2x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16}$
- $A_6 = 3\left(x^2 - 2x - \dfrac{2}{3}\right) = 3\left((x-1)^2 - 1 - \dfrac{2}{3}\right) = 3(x-1)^2 - 5$

Correction de l'exercice 83

Pour revoir comment exploiter la connaissance d'un point d'annulation d'une expression polynomiale de degré 2 pour factoriser cette dernière, on pourra revoir l'exercice 13. C'est le cas pour f_3 qui admet 1 comme point d'annulation évident et pour f_5 qui admet -1 comme point d'annulation évident. N'oubliez pas de simplifier les racines carrées dans le cas de f_1; on pourra revoir les exercices 22, 40, 67 et 72.

- Les points d'annulation de f_1 sont $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$.
- Les points d'annulation de f_2 sont $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{3}{2}$.
- Les points d'annulation de f_3 sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$.
- N'utilisez pas le discriminant dans ce cas; on conclut directement avec l'identité remarquable (IR3). Les points d'annulation de f_4 sont $\dfrac{1}{6}$ et $-\dfrac{1}{6}$.
- Les points d'annulation de f_5 sont -1 et $\dfrac{1}{3}$.
- Les points d'annulation de f_6 sont $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 84

- $A_1 = -\big(x^2 - 4x + 4\big) = -(x-2)^2$
- $A_2 = -x^2\big(9x^2 - 6x + 1\big) = -x^2(3x-1)^2$
- $A_3 = 3x^2y\big(16x^4 - 25\big) = 3x^2y\big((4x^2)^2 - 5^2\big) = 3x^2y(4x^2-5)(4x^2+5) = 3x^2y(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})(2x+\mathrm{i}\sqrt{5})(2x-\mathrm{i}\sqrt{5})$
- $A_4 = \big(4(x+1)\big)^2 - 5^2 = \big(4(x+1)-5\big)\big(4(x+1)+5\big) = (4x-1)(4x+9)$
- $A_5 = (x-7)^2$
- $A_6 = 4(xy^2)^2 - 4xy^2 + 1 = (2xy^2-1)^2$
- $A_7 = x(y-1) - (y-1) = (x-1)(y-1)$
- $A_8 = -5x^2\big(2x^2 + x + 5\big) = -5x^2\left(x + \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{39}}{4}\right)\left(x + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{39}}{4}\right)$
- $A_9 = 16(2x+1)^2 - \big(y^2-2y+1\big) = \big(4(2x+1)\big)^2 - \big(y-1\big)^2 = \big(4(2x+1)-(y-1)\big)\big(4(2x+1)+(y-1)\big) = (8x-y+5)(8x+y+3)$
- $A_{10} = y^2 + y + xy + x = y(y+1) + x(y+1) = (x+y)(y+1)$
- $\begin{aligned} A_{11} &= (x^2-9)(x+2) + (x+1)(x-3) + x^2 - 9 \\ &= (x^2-9)(x+3) + (x+1)(x-3) \\ &= (x-3)(x+3)^2 + (x+1)(x-3) \\ &= (x-3)\big((x+3)^2 + x + 1\big) \\ &= (x-3)(x^2+7x+10) \\ &= (x-3)(x+2)(x+5) \end{aligned}$

- $A_{12} = \big((2x-1)(2x+1)\big)^2 - (2x+1)^2(x+1)^2$
$= (2x-1)^2(2x+1)^2 - (2x+1)^2(x+1)^2$
$= (2x+1)^2\big((2x-1)^2 - (x+1)^2\big)$
$= (2x+1)^2\big((2x-1)-(x+1)\big)\big((2x-1)+(x+1)\big)$
$= 3x(x-2)(2x+1)^2$
- $A_{13} = (3x-2y)^2 + 3(3x-2y) = (3x-2y)(3x-2y+3)$
- $A_{14} = x^2+2xy+y^2-x-y = (x+y)^2-(x+y) = (x+y)(x+y-1)$
- $A_{15} = (5-2x)(4x+3)+2(4x+3)-(4x+3)(2x-5) = 4(4x+3)(3-x)$

Correction de l'exercice 85

1. Pour être sûr d'utiliser un dénominateur pertinent, on cherche s'il existe deux rationnels, remplacés dans ce qui suit par ? bien qu'ils ne soient pas égaux, tels que pour tout complexe x, $2x^2+7x+3 = (2x+1)(?\times x + ?)$. On opère comme dans tous les exercices de «calcul mental». On trouve ainsi que pour tout complexe x, $2x^2+7x+3 = (2x+1)(x+3)$, ce qui simplifie notablement le calcul qui suit.
$$F_1 = \frac{3}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)(x+3)} = \frac{3(x+3)-1}{(2x+1)(x+3)} = \frac{3x+8}{(2x+1)(x+3)}$$
2. Le dénominateur de F_2 se factorise immédiatement car 1 est un point d'annulation de cette expression; on trouve alors l'autre point d'annulation de cette expression via la technique travaillée dans l'exercice 13. On sait ainsi que $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. Il apparaît alors que tous les termes du numérateur de F_2 ainsi que son dénominateur admettent $x-1$ comme facteur commun. On commence donc par simplifier F_2 par $x-1$.
$$F_2 = \frac{x-1-\dfrac{1}{x+1}}{x-3} = \frac{\dfrac{(x-1)(x+1)-1}{x+1}}{x-3} = \frac{x^2-2}{(x-3)(x+1)} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-3)(x+1)}$$
3. $F_3 = \dfrac{x(x+1)-y(y+1)}{x(y+1)} = \dfrac{x^2-y^2+x-y}{x(y+1)} = \dfrac{(x-y)(x+y)+x-y}{x(y+1)} = \dfrac{(x-y)(x+y+1)}{x(y+1)}$
4. On met en premier lieu $x-y$ en facteur puis on choisit un dénominateur pertinent en notant que $x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$.
$$F_4 = (x-y)\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{(x+y)^2}\right) = \frac{(x-y)(x+y-1)}{(x+y)^2}$$

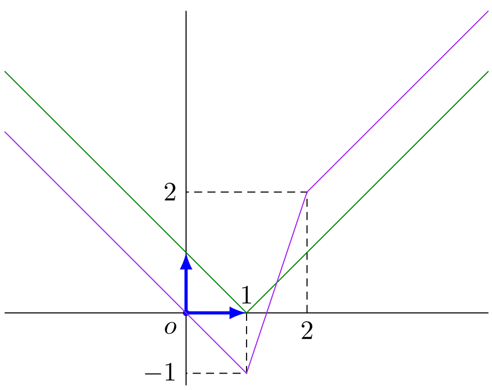
Correction de l'exercice 86

1. Le cours assure directement que l'ensemble des réels x vérifiant $|2x-3| \leqslant 4$ est $\left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right]$.
2. Le cours assure directement que l'ensemble des réels vérifiant $|1-x| \geqslant 1$ est $]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 87

- Par définition d'une valeur absolue, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) = x-1$ et pour tout $x \in]-\infty\,;1]$, $f(x) = 1-x$. On peut à présent tracer le graphe de f, qui apparaît ci dessous en vert.
- Par définition d'une valeur absolue,
  - pour tout $x \in [2\,;+\infty[$, $g(x) = 2(x-1)-(x-2) = x$,
  - pour tout $x \in [1\,;2]$, $g(x) = 2(x-1)-(2-x) = 3x-4$,
  - pour tout $x \in]-\infty\,;1]$, $g(x) = 2(1-x)-(2-x) = -x$.

  On peut à présent tracer le graphe de f, qui apparaît ci dessous en mauve.



Correction de l'exercice 88

1 **.** Pour tout $x \in [-9/5\,;+\infty[$, $\sqrt{5x+9} = \sqrt{9\left(1+\dfrac{5x}{9}\right)} = \sqrt{9}\sqrt{1+\dfrac{5x}{9}} = 3\sqrt{1+\dfrac{5x}{9}}$

2 **.** Pour tout réel x appartenant à $[-1/4\,;+\infty[$, $\sqrt{12x+3} = \sqrt{12\left(x+\dfrac{3}{12}\right)} = \sqrt{12}\sqrt{x+\dfrac{1}{4}} = 2\sqrt{3}\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}$

3 **.** Pour tout réel x appartenant à $]-3/4\,;+\infty[$, $\sqrt{\dfrac{2}{4x+3}} = \sqrt{\dfrac{2}{4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)}} = \sqrt{\dfrac{1}{2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}}}{\sqrt{x+\dfrac{3}{4}}}$.

4 **.** Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{x^3+2} = \sqrt{x^2\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{x+\dfrac{2}{x^2}} = x\sqrt{x+\dfrac{2}{x^2}}$ puisque $x>0$.

5 **.** Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{x+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}}$, puisque $x>0$.

6 **.** Pour tout réel x appartenant à $]-1/2\,;0]$, $\sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{x+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{-x}{\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}}$, puisque $x \leqslant 0$.

Correction de l'exercice 89

Pour revoir des simplifications de ce type, on pourra relire les corrigés des exercices 22 et 72.

- $A = \sqrt{2\times 3^2} + \sqrt{2\times 2^2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- $B = \sqrt{5\times 3^2} - 3\sqrt{5\times 2^2} = 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$
- $C = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{5}+1}{2} - 3 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{2} - 3 = \sqrt{5}$
- On note que $\sqrt{15}+\sqrt{20}-\sqrt{5} = \sqrt{3\times 5}+\sqrt{5\times 2^2}-\sqrt{5} = \sqrt{5}\left(\sqrt{3}+1\right)$. Donc

$$D = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}{7}$$

  Développer le numérateur de D ne simplifiera l'écriture. Vue la question posée, il n'est donc pas pertinent de le faire.

Correction de l'exercice 90

- Plutôt que multiplier par la quantité conjuguée pour gérer A, il est plus pertinent d'appliquer l'identité remarquable (IR3). En effet

$$A = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}-2$$

- Le réel 1 est un point d'annulation évident du numérateur de B; on trouve alors l'autre point d'annulation de cette expression via la technique travaillée dans l'exercice 13. On sait ainsi sans calcul que $2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$. Comme dans le cas de A, on utilise alors l'identité remarquable (IR3) pour achever la simplification de B. Ainsi

$$B = \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)(2x+1)}{\sqrt{x}-1} = \left(\sqrt{x}+1\right)(2x+1)$$

- $C = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x(x+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

Correction de l'exercice 91

1 **.** Pour tout réel positif x, $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$.

2 **.** Soit $x \in]1\,;+\infty[$. Comme $\sqrt{x}$ est un réel positif, on peut exploiter la question précédente.

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}+1\right) = \left(\sqrt{x}\right)^3 - 1 \\ \text{donc} \quad & \left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right) = x\sqrt{x}-1 \\ \text{donc} \quad & A = x+\sqrt{x}+1. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 92

- Cet exercice est la preuve d'une identité fondée sur une égalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 24, 31, 44 et 68. Dans le corrigé du second exercice, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, c'est à dire comment anticiper les calculs pour favoriser les développements. Dans notre cas, on va partir du membre de droite de notre identité et développer. Ainsi, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=\frac{\left(x^2+2xy+y^2\right)-\left(x^2-2xy+y^2\right)}{4}=\frac{4xy}{4}=xy$$

Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$.

Correction de l'exercice 93

- Cet exercice est la preuve d'une identité fondée sur une égalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 24, 31, 44 et 68. Dans le corrigé du second exercice, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, c'est à dire comment anticiper les calculs pour favoriser les développements. Dans notre cas, on va partir du produit par $x-y$ du membre de droite de notre identité et développer. Ainsi, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq y$.

$$(x-y)\left(x^3+x^2y+xy^2+y^3\right)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3-\left(x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\right)=x^4-y^4$$

On obtient donc, en divisant par $x-y$ qui est non nul, que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq y$, $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

Correction de l'exercice 94

- Cet exercice est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\frac{y^2}{3}-x(2y-3x)=\frac{y^2-6xy+9x^2}{3}=\frac{(y-3x)^2}{3}$$

Comme le carré d'un réel est positif, on a montré que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x(2y-3x)\leqslant\dfrac{y^2}{3}$.

Correction de l'exercice 95

- Cet exercice est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x+y\neq 0$

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}-xy=\frac{x^3+y^3-xy(x+y)}{x+y}=\frac{x^3-x^2y+y^3-y^2x}{x+y}=\frac{x^2(x-y)+y^2(y-x)}{x+y}=\frac{\left(x^2-y^2\right)(x-y)}{x+y}$$

On utilise alors l'identité remarquable (IR3) pour factoriser le premier facteur du numérateur. On obtient alors

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}-xy=\frac{(x+y)(x-y)(x-y)}{x+y}=(x-y)^2$$

Comme le carré d'un réel est positif, on a montré que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x+y\neq 0$, $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\geqslant xy$.

Correction de l'exercice 96

1. Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$.

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x+y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2-(x+y)=x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y-(x+y)=2\sqrt{x}\sqrt{y}$$

2. Comme une racine carrée est positive, on a montré que $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\geqslant\left(\sqrt{x+y}\right)^2$. Comme la fonction racine carré est croissante, on en déduit que $\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|\geqslant\left|\sqrt{x+y}\right|$; on rappelle encore une fois que la racine carrée du carré d'un réel n'est pas le réel initial mais la valeur absolue de ce dernier. Dans notre cas, les grandeurs manipulées étant positives, valeurs absolues sont inutiles. On a donc montré que pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Correction de l'exercice 97

- On remarque que 4 et 64 sont des puissances de 2. On peut donc simplifier l'écriture de A en utilisant la propriété (LN1). En effet,
$$A = \frac{\ln\left(2^2\right)}{2} + \ln\left(2^6\right) - 3\ln(2) = \frac{2\ln(2)}{2} + 6\ln(2) - 3\ln(2) = 4\ln(2)$$
- Les réels $\sqrt{17}+4$ et $\sqrt{17}-4$ sont conjugués l'un de l'autre; leur produit ne fait donc plus apparaître de racine carrée. Il suffit donc de «regrouper» les deux logarithmes à l'aide de la propriété (LN1) et les deux racines carrées à l'aide de la propriété (R1) pour simplifier l'expression. Ainsi
$$B = \ln\left(\sqrt{\sqrt{17}+4} \times \sqrt{\sqrt{17}-4}\right) = \ln\left(\sqrt{\left(\sqrt{17}+4\right)\left(\sqrt{17}-4\right)}\right) = \ln\left(\sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2 - 4^2}\right) = \ln\left(\sqrt{1}\right) = 0$$
On aurait aussi pu utiliser les points (LN3) puis (LN1) pour proposer un calcul un peu différent sous la forme
$$B = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{17}+4\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{17}+4\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt{17}+4\right)\left(\sqrt{17}-4\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt{17}\right)^2 - 4^2\right) = \frac{\ln(1)}{2} = 0$$

Correction de l'exercice 98

Pour revoir des simplifications analogues à celles de cet exercice, on pourra relire les corrigés des exercices 29 et 30. Cet exercice demande en plus de préciser l'ensemble des réels pour lesquels une expression a un sens: c'est la question délicate sur le plan logique. Travaillons avec une expression en une variable, le problème logique étant le même avec plusieurs variables. On considère donc une expression $A(x)$ dépendant d'un réel x et on cherche l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut effectivement calculer $A(x)$. Par exemple, pour tout réel x, on peut calculer $\sqrt{x}$ si et seulement si $x \geqslant 0$ et on peut calculer $\ln(x-1)$ si et seulement si $x > 1$. En revenant au cas général, on cherche une **condition nécessaire et suffisante** ? sur un réel x pour que l'on puisse calculer $A(x)$. Autrement dit, on doit trouver une partie P de $\mathbb{R}$ telle que

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x appartient à P alors on peut calculer $A(x)$. Autrement dit, l'expression manipulée a un sens sur P.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on peut calculer $A(x)$ alors x appartient nécessairement à à P. Autrement dit, l'expression manipulée n'a pas de sens en dehors de P.

Sur des expressions simples, la partie P est facile à identifier; c'est le cas dans cet exercice. Mais il faut prendre garde au vocabulaire que l'on emploie pour répondre à la question. Donnons quelques exemples de formulations incorrectes dans le cas où l'expression est $\sqrt{x}$ où la partie P est pourtant clairement $\mathbb{R}^+$.

- Si on écrit: pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on peut calculer la racine carrée de x, on dit seulement que l'expression manipulée a un sens sur $\mathbb{R}^+$... mais on ne dit rien sur $\mathbb{R}^{-*}$. En particulier on ne dit pas que l'expression n'a pas de sens en -1. On fait la même faute en écrivant: si x est un réel positif, $\sqrt{x}$ a un sens.
- Si on écrit: pour que l'expression $\sqrt{x}$ soit définie, il faut que x soit positif, on assure que l'expression manipulée n'est pas définie sur $\mathbb{R}^{-*}$ mais on n'assure pas qu'elle est définie pour **tous** les réels positifs.

Sans faire de cet aspect logique un point clé de votre travail qui ne porte a priori que sur la technique, il est bon de réfléchir à cet aspect des mathématiques, que l'on reprendra en détail et longuement en sup et dont la compréhension est essentielle pour faire des mathématiques.

- Comme une exponentielle est strictement positive, A_1 a un sens pour tous les réels x et y.
$$A_1 = \frac{\exp\left(\dfrac{x}{2} + y\right)}{\mathrm{e}^{x+y}} = \mathrm{e}^{-x/2}$$
- Comme une exponentielle est strictement positive, A_2 a un sens pour tous les réels x et y.
$$A_2 = \ln\left(3\mathrm{e}^{x-y}\right) = \ln(3) + \ln\left(\mathrm{e}^{x-y}\right) = \ln(3) + x - y$$
- Par définition de la fonction logarithme, A_3 a un sens si et seulement si x est un réel strictement positif. On suppose dans cette question que cette contrainte est vérifiée.
$$A_3 = \exp\left(\ln\left(x^3\right)\right) = x^3$$
- La présence d'une racine carrée impose que x soit strictement positif. Pour que le premier logarithme soit défini, il faut et il suffit que le réel x manipulé vérifie $\sqrt{x} - 1 > 0$ soit $x > 1$. Le second logarithme est défini sans nouvelle contrainte sur le réel x. Finalement l'expression A_4 a un sens si et seulement si x appartient à $]1\,;+\infty[$. On suppose dans cette question que cette contrainte est vérifiée.
$$A_4 = \ln\left(\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\right) = \ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1\right) = \ln(x-1)$$

Correction de l'exercice 99

1. Cette question demandant de préciser l'ensemble des réels pour lesquels une expression a un sens, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 98. Pour déterminer le signe des valeurs prise par une fonction polynomiale, il suffit de factoriser cette dernière. Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Comme $x^2 + x = x(x+1)$, on sait que $x^2 + x > 0$ si et seulement si x appartient à $]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$. Pour factoriser $3x^2+2x-1$, on note que -1 est un point d'annulation évident de cette expression; on trouve alors l'autre point d'annulation de cette expression via la technique travaillée dans l'exercice 13. On sait ainsi sans calcul que $3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$. On en déduit que $3x^2+2x-1>0$ si et seulement si x appartient à $]-\infty\,;-1[\cup]1/3\,;+\infty[$. La partie D cherchée est l'intersection des deux parties déterminées. Autrement dit, $D =]-\infty\,;-1[\cup]1/3\,;+\infty[$.
2. Pour revoir des simplifications analogues à celles de cet exercice, on pourra relire les corrigés des exercices 29 et 30. Soit $x \in D$ tel que $x > 0$, afin que tous les logarithmes introduits aient un sens. On utilise les factorisations trouvées dans la première question et les propriétés (LN1) et (LN2).

$$A = \ln\big((3x-1)(x+1)\big) + 2\ln(x) - \ln\big(x(x+1)\big) = \ln\left(\frac{(3x-1)(x+1)x^2}{x(x+1)}\right) = \ln\big((3x-1)x\big)$$

Correction de l'exercice 100

1. Cette question est la preuve de deux identités fondées sur une inégalité. En effet, il est impératif de séparer l'encadrement en deux afin de pouvoir appliquer les idées introduites dans les exercices 25 et 26 pour aborder efficacement ce genre de question, qui sont efficaces même dans notre cas élémentaire. Vous pourrez aussi revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 53 et 60. Soit $x \in [1\,;2]$.

$$\frac{4x-3}{2x-1} - 1 = \frac{(4x-3)-(2x-1)}{2x-1} = \frac{2(x-1)}{2x-1}.\text{ Or } x-1 \geqslant 0 \text{ et } 2x-1 \geqslant 0 \text{ donc } \frac{4x-3}{2x-1} \geqslant 1.$$

et $$\frac{5}{3} - \frac{4x-3}{2x-1} = \frac{5(2x-1)-3(4x-3)}{3(2x-1)} = \frac{2(2-x)}{3(2x-1)}.\text{ Or } 2-x \geqslant 0 \text{ et } 2x-1 \geqslant 0 \text{ donc } \frac{4x-3}{2x-1} \leqslant \frac{5}{3}.$$

Finalement, pour tout $x \in [1\,;2]$, $1 \leqslant \dfrac{4x-3}{2x-1} \leqslant \dfrac{5}{3}$.

- Rappelons une autre méthode, ne nécessitant même pas de connaître l'encadrement a priori. En utilisant la transformation exposée dans les exercices 3 et surtout 11 et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, encadrer l'expression proposée est élémentaire. Cette méthode est d'ailleurs utilisée dans l'exercice 38 dont vous pourrez relire le corrigé. Soit ainsi $x \in [1\,;2]$. On note que

$$\frac{4x-3}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-1}{2x-1} = 2 - \frac{1}{2x-1}$$

Or $\quad 1 \leqslant 2x-1 \leqslant 3$

donc $\quad \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2x-1} \leqslant 1$

puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit alors successivement

$$-1 \leqslant -\frac{1}{2x-1} \leqslant -\frac{1}{3}$$

donc $\quad 2-1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{2x-1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{3}$

Finalement, pour tout $x \in [1\,;2]$, $1 \leqslant \dfrac{4x-3}{2x-1} \leqslant \dfrac{5}{3}$.

2. Comme la fonction logarithme est croissante, on déduit de la première question que pour tout $x \in [1\,;2]$,

$$\ln(1) \leqslant \ln\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) \leqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

On déduit alors directement de la propriété (LN2) et du fait que $\ln(1) = 0$ que pour tout $x \in [1\,;2]$,

$$0 \leqslant \ln(4x-3) - \ln(2x-1) \leqslant \ln(5) - \ln(3)$$

Correction de l'exercice 101

1. Soit $x \in [1\,;+\infty[$. Cette question est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. On est ici amené à factoriser x^2+2x-3. Comme 1 est un point d'annulation évident de cette expression, on peut trouver l'autre point d'annulation de cette expression via la technique travaillée dans l'exercice 13. On sait ainsi sans calcul que $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$. Comme $x \geqslant 1$, $(x-1)(x+3) \geqslant 0$ c'est à dire $x^2+2x-3 \geqslant 0$. Finalement, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $x^2+2x \geqslant 3$.
2. Soit $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$. On note que $\ln(x) \geqslant 1$ donc on peut exploiter la première identité et écrire $\big(\ln(x)\big)^2 + 2\ln(x) \geqslant 3$. Le point (LN1) assure alors que pour tout $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\big(\ln(x)\big)^2 + \ln(x^2) \geqslant 3$.

Correction de l'exercice 102

1. Cette question est la preuve d'une identité fondée sur une inégalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 25, 26, 53 et 60. Dans le corrigé des deux premiers exercices, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question. Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$.

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}$$

Comme le carré d'un réel est positif, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{xy}\leqslant\dfrac{x+y}{2}$.

2. Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$. En utilisant successivement le résultat de la première question, qui est en particulier valable, la croissance de la fonction logarithme, on peut écrire puis le point (LN3),

$$\begin{aligned}
&\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}\\
\text{donc}\quad &\ln\left(\sqrt{xy}\right)\leqslant\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\\
\text{donc}\quad &\frac{\ln(xy)}{2}\leqslant\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Le point (LN1) assure alors que pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$, $\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2}\leqslant\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Les réels e^x et e^y sont positifs donc ont peut exploiter l'identité de la première question avec ces réels. On obtient ainsi

$$\sqrt{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y}\leqslant\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$$

En utilisant alors les points (ER1) et (ER3), on note que $\sqrt{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y}=\exp\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\exp\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$.

Correction de l'exercice 103

1. Cette question est la preuve de deux identités fondées sur une inégalité; en effet, il est impératif de séparer l'encadrement en deux afin de pouvoir appliquer les idées introduites dans les exercices 25 et 26 pour aborder efficacement ce genre de question. Vous pourrez aussi revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 53 et 60. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&1+f(x)=1+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\\
\text{et}\quad &1-f(x)=1-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}
\end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, $1+f(x)$ et $1-f(x)$ sont des quotients de nombres strictement positifs donc sont strictement positifs. Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1<f(x)$ et $f(x)<1$.

2. Cette question, comme la suivante, est la preuve d'une identité fondée sur une égalité. Vous pourrez revoir la rédaction de ce type de preuve dans les exercices 24, 31, 44 et 68. Dans le corrigé du second exercice, vous trouverez en particulier les idées à avoir pour aborder efficacement ce genre de question, c'est à dire comment anticiper les calculs pour favoriser les développements. Soit $x\in\mathbb{R}$. Remplacer $f(x)$ par son expression en fonction de x est la méthode «classique» mais c'est bien laborieux. Il vaut mieux simplifier avant tout l'expression à manipuler en y repérant des identités remarquables. En effet

$$\frac{1+2f(x)+f(x)^2}{1-f(x)^2}=\frac{\left(1+f(x)\right)^2}{\left(1-f(x)\right)\left(1+f(x)\right)}=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

On retrouve alors les expressions que l'on a manipulées dans la première question et on peut écrire

$$\frac{1+2f(x)+f(x)^2}{1-f(x)^2}=\frac{\dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}{\dfrac{2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\times\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^{2x}$$

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Aucune simplification n'apparaît a priori et on va laborieusement remplacer $f(x)$ et $f(y)$ dans le membre de droite de l'identité en espérant pouvoir faire apparaître $f(x+y)$. Si on échoue, il sera toujours temps

de soustraire $f(x+y)$ au membre de droite et de tout mettre au même dénominateur pour développer et obtenir 0. Même si cette dernière méthode aboutit infailliblement, elle est si pénible qu'on ne l'utilise qu'en dernier ressort.

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \times \dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}} = \frac{\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\left(e^y-e^{-y}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)}}{\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)}}$$

Comme dans le calcul de la question précédente, l'expression se simplifie lors de l'usage de la formule (F3). Il reste alors à développer le numérateur et le dénominateur de l'expression restante. En procédant avec méthode et en utilisant systématiquement la propriété (ER1) de l'exponentielle, on obtient

$$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\left(e^y-e^{-y}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)+\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y-e^{-y}\right)} = \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{2e^{x+y}+2e^{-x-y}} = f(x+y)$$

après simplification par le facteur 2. Finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.

Correction de l'exercice 104

Cet exercice est analogue à l'exercice 37, dont vous pouvez relire le corrigé. Revoyez en particulier les erreurs à ne pas commettre lors de la manipulation de différences et méditez à nouveau la raison pour laquelle la deuxième méthode d'encadrement utilisée est meilleure que la première dans notre cas. La deuxième question demande d'effectuer une mise sous forme canonique d'une expression polynomiale de degré 2; vous pourrez revoir des manipulations de ce type dans les exercices 14, 35 et 45.

1. Comme $1 \leqslant x \leqslant 3$ et comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$. De plus $-12 \leqslant -4x \leqslant -4$. On en déduit par simple sommation $-8 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 8$.
2. On note que $-1 \leqslant x-2 \leqslant 1$. On peut alors encadrer $(x-1)^2$ en travaillant comme dans l'exercice 37. Ainsi si $-1 \leqslant x-2 \leqslant 0$ la décroissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^-$ assure que $0 \leqslant (x-2)^2 \leqslant 1$. De manière analogue, si $0 \leqslant x-2 \leqslant 1$ la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ donne le même résultat. Finalement, on sait que dans tous les cas $0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 1$.
   - On peut être plus efficace en exploitant la notion de valeur absolue et en notant que notre encadrement équivaut à $|x-1| \leqslant 1$ d'après la propriété (V4). Comme le carré d'un réel et de la valeur absolue de ce réel est la même grandeur, la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ assure directement que $0 \leqslant (x-1)^2 \leqslant 1$, sans distinguer deux cas.
   - On note que $x^2-4x+3 = (x-2)^2-1$. Le premier encadrement assure alors directement que $-1 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 0$, ce qui est bien plus précis que l'estimation obtenue dans la première question.
3. On suppose dans ce point que x appartient à $[-4\,;-2]$ on encadre l'expression voulue en utilisant successivement les deux méthodes rappelées dans les deux premières questions de cet exercice.
   - Comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et comme $-4 \leqslant x \leqslant -2$, on sait que $4 \leqslant x^2 \leqslant 16$. De plus $8 \leqslant -4x \leqslant 16$. On en déduit par simple sommation $15 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 35$.
   - Comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et comme $-6 \leqslant x-2 \leqslant -4$, on sait que $16 \leqslant (x-2)^2 \leqslant 36$. Il s'ensuit, en utilisant la réécriture de notre expression polynomiale de degré 2 vue dans de la deuxième question que $15 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 35$. Notons que dans ce cas, la méthode utilisée ne donne pas pas un meilleur résultat que la méthode «brutale».
   - On suppose dans ce point que x appartient à $[-2\,;1]$ et on encadre l'expression voulue en utilisant successivement les deux méthodes rappelées dans les deux premières questions de cet exercice.
     - On distingue deux cas suivant la localisation de x afin de tenir compte des variations de la fonction carré. Si $x \in [-2\,;0]$, comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur cet intervalle, on sait que $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Si $x \in [0\,;1]$, comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur cet intervalle, on sait que $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$. Finalement, dans tous les cas, $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. De plus $-4 \leqslant -4x \leqslant 8$. On en déduit par simple sommation $-1 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 15$.
     - Comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et comme $-4 \leqslant x-2 \leqslant -1$, on sait que $1 \leqslant (x-2)^2 \leqslant 16$. Il s'ensuit, en utilisant la réécriture de notre expression polynomiale de degré 2 vue dans de la deuxième question que $0 \leqslant x^2-4x+3 \leqslant 15$. Dans ce dernier cas l'estimation obtenue est un peu meilleure qu'avec la simple somme des encadrements directs.

Correction de l'exercice 105

1. Comme $1 \leqslant x \leqslant 3$ et comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$ donc $2 \leqslant x^2+1 \leqslant 10$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que
$$\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$
   Or $1 \leqslant x \leqslant 3$. Toutes les inégalités ne mettant en jeu que des réels positifs, on en déduit que $\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

2. Comme $1 \leqslant x \leqslant 3$ et comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on sait que $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$. Il s'ensuit par simple addition que $\dfrac{4}{3} \leqslant x + \dfrac{1}{x} \leqslant 4$. On note de plus que l'expression encadrée est l'inverse de celle que l'on veut étudier. Comme tous les réels mis en jeu dans cet encadrement sont positifs, la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ permet d'écrire un encadrement bien plus précis que celui de la première question, à savoir

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{3}{4}$$

3. On suppose dans ce point que x appartient à $[-4\,;-2]$. On encadre l'expression voulue en utilisant successivement les deux méthodes rappelées dans les deux premières questions de cet exercice.

- Comme $-4 \leqslant x \leqslant -2$ et comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$, on sait que $4 \leqslant x^2 \leqslant 16$ donc $5 \leqslant x^2+1 \leqslant 17$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que

$$\frac{1}{17} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{5}$$

  Or $2 \leqslant -x \leqslant 4$. Toutes les inégalités ne mettant en jeu que des réels positifs, on en déduit que $\dfrac{2}{17} \leqslant \dfrac{-x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{4}{5}$. On a donc montré que $-\dfrac{4}{5} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant -\dfrac{2}{17}$

- Comme $-4 \leqslant x \leqslant -2$ et comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$, on sait que $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{4}$. Il s'ensuit par simple addition que $-\dfrac{9}{2} \leqslant x + \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{9}{4}$. On utilise encore une fois la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ en notant à nouveau que l'expression voulue est l'inverse de celle que l'on vient d'encadrer. On obtient alors un encadrement bien plus précis que celui du premier point, à savoir

$$-\frac{4}{9} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant -\frac{2}{9}$$

4. Pour ce troisième calcul, il semble que la deuxième méthode soit proscrite puisque la variable peut prendre la valeur 0. Même si on écarté cette valeur particulière, encadrer $x + \dfrac{1}{x}$ lorsque x appartient à $[-2\,;1] \setminus \{0\}$ est impossible. Par exemple, si $x = 10^{-12}$, $x + \dfrac{1}{x}$ est strictement plus grand que 10^{12}... On se limite donc à l'usage de la première méthode, en faisant bien attention au signe des expressions manipulées. On distingue en premier lieu deux cas suivant la localisation de x afin de tenir compte des variations de la fonction carré. Si $x \in [-2\,;0]$, comme $x \mapsto x^2$ est décroissante sur cet intervalle, on sait que $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Si $x \in [0\,;1]$, comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur cet intervalle, on sait que $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$. Finalement, dans tous les cas, $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. donc $1 \leqslant x^2+1 \leqslant 5$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$$

On distingue à nouveau deux cas suivant le signe de x.

- Si $x \in [-2\,;0]$ alors $0 \leqslant -x \leqslant 2$ donc $0 \leqslant \dfrac{-x}{x^2+1} \leqslant 2$ donc $-2 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant 0$.
- Si $x \in [0\,;1]$ alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant 1$.

On conserve à présent les estimations les plus mauvaises afin qu'elles soient vérifiées dans tous les cas. Autrement dit, on est sûr que $-2 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant 1$.

. Avec cet exemple, on atteint sans doute la limite de ce que l'on peut faire avec du calcul purement algébrique, c'est à dire en n'utilisant que les opérations numériques $+$, $-$, $\times$ et $/$. Des outils analytiques, comme l'étude d'une fonction montrent ici tout leur intérêt. On introduit par exemple la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-2\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}$$

La fonction f est dérivable et pour tout $x \in [-2\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. On note à présent que

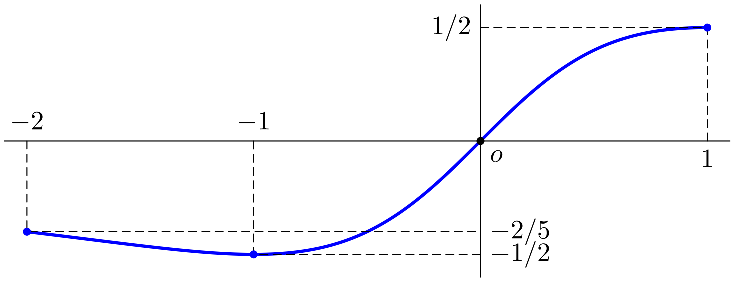
- La fonction f' ne prend que des valeurs négatives sur $[-2\,;-1]$. La fonction f décroit donc sur cet intervalle. Il en découle que pour tout $x \in [-2\,;-1]$, $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(-2)$. Autrement dit, pour tout $x \in [-2\,;-1]$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant -\frac{2}{5}$$

- La fonction f' ne prend que des valeurs positives sur $[-1\,;1]$. La fonction f croit donc sur cet intervalle. Il en découle que pour tout $x \in [-1\,;1]$, $f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Autrement dit, pour tout $x \in [-1\,;1]$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

Tous ces renseignements apparaissent clairement sur ce graphe de f tracé ci-dessous.



Finalement, pour tout $x \in [-2\,;1]$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Le résultat obtenu est en effet bien meilleur que le précédent. Même si l'analyse permet souvent d'obtenir des résultats optimaux, il ne faut pas l'employer systématiquement et sans réfléchir. En effet, nous verrons que la rédaction d'une étude de fonction met en jeu des théorèmes assez fins dont toutes les hypothèses doivent être citées. Un seul oubli... et c'est toute la preuve qui est invalide. C'est d'autant plus dommage lorsqu'un calcul élémentaire permet d'obtenir le même résultat, ou du moins un résultat suffisant, sans aucun risque. Vous pourrez d'ailleurs noter que c'est le cas pour notre exercice. Avec un peu d'imagination, on pouvait remarquer qu'en notant x un réel quelconque (ce qui est bien plus général que la contrainte imposée dans cet exercice),

$x^2+1-2x = (x-1)^2$ donc $x^2+1-2x \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 2x$.
et $x^2+1+2x = (x+1)^2$ donc $x^2+1+2x \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant -2x$.
Or $x^2+1 > 0$
donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 106

Cet exercice est analogue à l'exercice 38, dont vous pouvez relire le corrigé. Revoyez en particulier les erreurs à ne pas commettre lors de la manipulation de quotients et méditez à nouveau la raison pour laquelle la deuxième méthode d'encadrement utilisée est meilleure que la première dans notre cas. La deuxième question demande d'effectuer une transformation d'une expression obtenue comme quotient de deux fonctions polynomiales de degré 1; vous pourrez revoir des manipulations de ce type dans la question 3 de l'exercice 3, dans les deux premières questions de l'exercice 11.

1. Comme $1 \leqslant x \leqslant 3$, $4\times 1 - 1 \leqslant 4x-1 \leqslant 4\times 3-1$ soit $3 \leqslant 4x-1 \leqslant 11$. Comme les trois nombres apparaissant dans ce dernier encadrement sont strictement positifs puisque supérieurs ou égaux à 5, la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ assure que

$$\frac{1}{11} \leqslant \frac{1}{4x-1} \leqslant \frac{1}{3}$$

Or $5 \leqslant 2x+3 \leqslant 9$, en travaillant comme pour établir le premier encadrement

donc $\dfrac{5}{11} \leqslant \dfrac{2x+3}{4x-1} \leqslant 3$, puisque tous les nombres manipulés sont positifs.

2. On note que $\dfrac{2x+3}{4x-1} = \dfrac{\frac{1}{2}(4x-1)+\frac{7}{2}}{4x-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2(4x-1)}$. On réutilise un encadrement de la question précédente.

$$\frac{1}{11} \leqslant \frac{1}{4x-1} \leqslant \frac{1}{3}$$

donc $\dfrac{7}{22} \leqslant \dfrac{7}{2(4x-1)} \leqslant \dfrac{7}{6}$

donc $\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{22} \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2(4x-1)} \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{6}$

donc $\dfrac{9}{11} \leqslant \dfrac{2x+3}{4x-1} \leqslant \dfrac{5}{3}$

3. On suppose à présent que x appartient à $[-4\,;-2]$ et on encadre l'expression voulue en utilisant successivement les deux méthodes rappelées dans les deux premières questions de cet exercice.

- Comme $-4 \leqslant x \leqslant -2$, $-17 \leqslant 4x-1 \leqslant -9$. Comme les trois nombres apparaissant dans ce dernier encadrement sont strictement négatifs, la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ assure que

$$
\begin{array}{ll}
 & -\dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{4x-1} \leqslant -\dfrac{1}{17} \text{ donc } \dfrac{1}{17} \leqslant \dfrac{-1}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{9} \\
\text{Or} & -5 \leqslant 2x+3 \leqslant -1 \text{ donc } 1 \leqslant -(2x+3) \leqslant 5 \\
\text{donc} & \dfrac{1}{17} \leqslant \dfrac{2x+3}{4x-1} \leqslant \dfrac{5}{9}, \text{ puisque tous les nombres manipulés sont positifs.}
\end{array}
$$

- Pour appliquer la deuxième méthode, on utilise l'estimation du premier point.

$$
\begin{array}{ll}
 & -\dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{1}{4x-1} \leqslant -\dfrac{1}{17} \\
\text{donc} & -\dfrac{7}{18} \leqslant \dfrac{7}{2(4x-1)} \leqslant -\dfrac{7}{34} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{18} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2(4x-1)} \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{34} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{2x+3}{4x-1} \leqslant \dfrac{5}{17}
\end{array}
$$

Correction de l'exercice 107

- On peut proposer plusieurs méthodes d'encadrement. La méthode la plus directe consiste à encadrer chaque logarithme en utilisant la croissance de la fonction. Comme $x \in [5\,;7]$,

$$
\begin{array}{ll}
 & 1 \leqslant x-4 \leqslant 3 \text{ donc } \ln(1) \leqslant \ln(x-4) \leqslant \ln(3) \text{ ce qui revient à } 0 \leqslant \ln(x-4) \leqslant \ln(3). \\
\text{et} & 11 \leqslant 2x+1 \leqslant 15 \text{ donc } \ln(11) \leqslant \ln(2x+1) \leqslant \ln(15) \text{ donc } -\ln(15) \leqslant -\ln(2x+1) \leqslant -\ln(11) \\
\text{donc} & -\ln(15) \leqslant \ln(x-4) - \ln(2x+1) \leqslant \ln(3) - \ln(11)
\end{array}
$$

On peut préférer regrouper les logarithmes et écrire que $\ln(x-4)-\ln(2x+1) = \ln\left(\dfrac{x-4}{2x+1}\right)$. Pour encadrer l'argument du logarithme, on peut encadrer brutalement son numérateur et son dénominateur ou préférer écrire ce dernier sous une forme plus adaptée. On retrouve ici le problème posé dans l'exercice 38, dont vous pourrez relire le corrigé. Revoyez en particulier les erreurs à ne pas commettre lors de la manipulation de quotients et méditez à nouveau la raison pour laquelle la deuxième méthode d'encadrement utilisée est meilleure que la première dans notre cas. La réécriture pertinente de l'argument du logarithme est étudiée dans la question 3 de l'exercice 3 et dans les deux premières questions de l'exercice 11. Notez que l'estimation «brutale» du quotient ne permet pas d'améliorer l'encadrement déjà obtenu: travailler sans modification sur une différence de logarithme ou sur le logarithme d'un quotient donne bien évidemment le même résultat d'après la propriété (LN2). On note ainsi que

$$
\begin{array}{ll}
 & 11 \leqslant 2x+1 \leqslant 15 \text{ donc } \dfrac{1}{15} \leqslant \dfrac{1}{2x+1} \leqslant \dfrac{1}{11}, \text{ puisque } x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}. \\
\text{Or} & 1 \leqslant x-4 \leqslant 3. \\
\text{donc} & \dfrac{1}{15} \leqslant \dfrac{x-4}{2x+1} \leqslant \dfrac{3}{11}, \text{ puisque toutes les grandeurs manipulées sont positives.} \\
\text{donc} & \ln\left(\dfrac{1}{15}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{x-4}{2x+1}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{3}{11}\right), \text{ puisque la fonction logarithme est croissante.}
\end{array}
$$

Comme prévu, on obtient bien la même estimation. Pour améliorer notre résultat, précisons l'encadrement de l'argument du logarithme. On note que

$$
\begin{array}{ll}
 & \dfrac{x-4}{2x+1} = \dfrac{\dfrac{1}{2}(2x+1) - \dfrac{9}{2}}{2x+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2(2x+1)} \\
\text{Or} & \dfrac{1}{15} \leqslant \dfrac{1}{2x+1} \leqslant \dfrac{1}{11} \\
\text{donc} & -\dfrac{9}{22} \leqslant -\dfrac{9}{2(2x+1)} \leqslant -\dfrac{3}{10} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{22} \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2(2x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{10} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{11} \leqslant \dfrac{x-4}{2x+1} \leqslant \dfrac{1}{5}.
\end{array}
$$

En utilisant une dernière fois la croissance de la fonction logarithme, on obtient un encadrement plus précis, à savoir

$$\ln\left(\dfrac{1}{11}\right) \leqslant \ln(x-4) - \ln(2x+1) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$$

Correction de l'exercice 108

1. • On note que $x-1 \in [-1\,;2]$. Si $-1 \leqslant x-1 \leqslant 0$, la décroissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^-$ assure que $0 \leqslant |x-1| \leqslant 1$. Si $0 \leqslant x-1 \leqslant 2$, la croissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ assure que $0 \leqslant |x-1| \leqslant 2$. En conservant les contraintes les moins fortes afin que l'estimation fournie soit valable pour toutes les valeurs de x dans $[0\,;3]$, on en déduit que $0 \leqslant |x-1| \leqslant 2$. Notez que l'encadrement ne peut pas être amélioré puisque 0 et 2 sont effectivement des valeurs atteintes par la fonction $x \mapsto |x-1|$ sur l'intervalle $[0\,;3]$, à savoir en 1 et en 3.
   • La localisation de x impose que $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$ donc $-1 \leqslant x^2-1 \leqslant 8$. On travaille alors comme dans le premier cas. Si $-1 \leqslant x^2-1 \leqslant 0$, la décroissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^-$ assure que $0 \leqslant |x^2-1| \leqslant 1$. Si $0 \leqslant x^2-1 \leqslant 8$, la croissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ assure que $0 \leqslant |x^2-1| \leqslant 8$. En conservant les contraintes les moins fortes afin que l'estimation fournie soit valable pour toutes les valeurs de x dans $[0\,;3]$, on en déduit que $0 \leqslant |x^2-1| \leqslant 8$. Notez encore une fois que l'encadrement ne peut pas être amélioré puisque 0 et 8 sont effectivement des valeurs atteintes par la fonction $x \mapsto |x^2-1|$ sur l'intervalle $[0\,;3]$, à savoir en 1 et en 3.
2. • On note que $x-1 \in]-\sqrt{2}-1\,;\sqrt{2}-1[$. Si $-\sqrt{2}-1 < x-1 \leqslant 0$, la stricte décroissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^-$ assure que $0 \leqslant |x-1| < \sqrt{2}+1$. Si $0 \leqslant x-1 < \sqrt{2}-1$, la stricte croissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ assure que $0 \leqslant |x-1| < \sqrt{2}-1$. En conservant les contraintes les moins fortes afin que l'estimation fournie soit valable pour toutes les valeurs de x dans $]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}[$, on en déduit que $0 \leqslant |x-1| < \sqrt{2}+1$.
   • La localisation de x impose que $0 \leqslant x^2 < 2$ donc $-1 \leqslant x^2-1 < 1$. Si $-1 \leqslant x^2-1 \leqslant 0$, la décroissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^-$ assure que $0 \leqslant |x^2-1| \leqslant 1$. Si $0 \leqslant x^2-1 < 1$, la stricte croissance de la valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ assure que $0 \leqslant |x^2-1| < 1$. En conservant les contraintes les moins fortes afin que l'estimation fournie soit valable pour toutes les valeurs de x dans $]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}[$, on en déduit que $0 \leqslant |x^2-1| \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 109

On trouvera des exemples de classement de réels dans le cours et dans le corrigé de l'exercice 36, qu'il faut impérativement travailler à nouveau.

1. • Classer $x-1$ et $y-1$ est élémentaire. Mais pour classer les inverses de ces deux réels, il faut en connaître le signe. On distingue alors trois cas.
   - On suppose que $x \leqslant y < 1$. Dans ce cas $x-1 \leqslant y-1 < 0$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$, on en déduit que $\dfrac{1}{y-1} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.
   - On suppose que $1 < x \leqslant y$. Dans ce cas $0 < x-1 \leqslant y-1$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit à nouveau que $\dfrac{1}{y-1} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.
   - On suppose que $x < 1 < y$. Dans ce cas $x-1 < 0 < y-1$. Sachant qu'un réel non nul et son inverse sont de même signe, on sait que $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{y-1}$. L'inégalité est même stricte.
2. • Soit x et y deux réels tels que $x < 1 < y$. Comme la fonction logarithme est strictement croissante, $\ln(x) < 0 < \ln(y)$. Comme un réel non nul, son cube et son inverse son de même signe, on en déduit que $\big(\ln(x)\big)^{-3} < \big(\ln(y)\big)^{-3}$. En revanche, on ne peut pas classer les réels $\big(\ln(x)\big)^2$ et $\big(\ln(y)\big)^2$ sans information supplémentaire. Traitons deux exemples montrant que le classement des deux réels manipulés est imprévisible.
   - On note que $\mathrm{e}^{-2} < 1 < \mathrm{e}$. Or $\big(\ln(\mathrm{e}^{-2})\big)^2 = 4$ et $\big(\ln(\mathrm{e})\big)^2 = 1$ donc $\big(\ln(\mathrm{e}^{-2})\big)^2 > \big(\ln(\mathrm{e})\big)^2$.
   - On note que $\mathrm{e}^{-1} < 1 < \mathrm{e}^2$. Or $\big(\ln(\mathrm{e}^{-1})\big)^2 = 1$ et $\big(\ln(\mathrm{e}^2)\big)^2 = 4$ donc $\big(\ln(\mathrm{e}^{-1})\big)^2 < \big(\ln(\mathrm{e}^2)\big)^2$.

Correction de l'exercice 110

Vous trouverez des exemples de tels calculs dans l'exercice 41.

- Une lecture directe sur le cercle trigonométrique assure que $A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- On note que $-39 = 1 - 4 \times 10$ donc $-\dfrac{39\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} - 10\pi$. On en déduit que $B = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- On note que $\dfrac{39\pi}{2} - \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{117\pi}{6} - \dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{106\pi}{6} = \dfrac{53\pi}{3} = \dfrac{(54-1)\pi}{3} = 18\pi - \dfrac{\pi}{3}$.
  On en déduit que $C = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- On note que $\dfrac{8\pi}{15} - \dfrac{11\pi}{5} = \dfrac{8\pi}{15} - \dfrac{33\pi}{15} = -\dfrac{25\pi}{15} = -\dfrac{5\pi}{3}$.
  Une lecture directe sur le cercle trigonométrique assure alors que $D = \dfrac{1}{2}$.

- La formule (T8) puis une lecture sur le cercle trigonométrique assurent que $E = 8\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = (-8) \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$.
- Les angles mis en jeu sont assez petits pour qu'une lecture directe sur le cercle trigonométrique suffise en notant que $12 \times \dfrac{\pi}{3}$ et $12 \times \dfrac{\pi}{6}$ sont des multiples entiers de 2π. On trouve ainsi que $F = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 7 \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.
- On prend bien garde à ne pas mettre les mesures des angles au même dénominateur car les formules (T3) et (T4) permettent de se débarrasser du terme 15π. On note alors que $G = -\cos\left(\dfrac{11\pi}{2}\right) = -\cos\left(6\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
- Avez vous noté que 138 est divisible par 3? On note donc que $H = \sin(-46\pi) = 0$. Il faut reconnaître immédiatement les points d'annulation de sinus... et de cosinus.
- On note que $I = \sin\left(\dfrac{(36+2)\pi}{3}\right) \times \cos\left(\dfrac{(12-1)\pi}{6}\right) = \sin\left(12\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) \times \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

  Une lecture directe sur le cercle trigonométrique assure alors que $I = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{4}$.
- Les formules (T3) et (T4) assurent que $J = \cos(0) = 1$ si k est pair et $J = \cos(\pi) = -1$ si k est impair.
  On en déduit donc que $J = (-1)^k$.
- Les formules (T9) et (T10) assurent que $K = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ si k est pair et $K = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$ si k est impair.

  On en déduit donc que $K = (-1)^k$.
- Les formules (T3) et (T4) assurent que $L = \cos\left(\dfrac{39\pi}{4}\right)$ si k est pair et $L = -\cos\left(\dfrac{39\pi}{4}\right)$ si k est impair.

  Donc $L = (-1)^k \cos\left(\dfrac{39\pi}{4}\right) = (-1)^k \cos\left(\dfrac{(40-1)\pi}{4}\right) = (-1)^k \cos\left(10\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = (-1)^k \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 111

Vous trouverez des exemples de tels calculs dans l'exercice 42.

- La formule (T10) assure que $\sin(13\pi - \alpha) = \sin(12\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. La formule (T12) assure alors que $\sin(13\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.
- On peut simplifier directement l'expression via une lecture sur le cercle trigonométrique. On peut aussi utiliser successivement les formules (T10), (T13) et (T8) pour écrire

$$\begin{array}{ll} & \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\alpha) \\ \text{et} & \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \text{donc} & B = \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \end{array}$$

- On utilise successivement les formules (T10) et (T12) pour transformer le premier terme. On utilise la formule (T11) pour transformer le deuxième terme. Finalement

$$\begin{array}{ll} & \sin(17\pi - \alpha) = \sin(16\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \\ \text{et} & \sin\left(-\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha) \\ \text{donc} & C = \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \end{array}$$

- On utilise successivement les formules (T4), (T7) et (T5) pour écrire

$$D = \cos\left(\alpha + \frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + 6\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

- On peut simplifier directement l'expression via une lecture sur le cercle trigonométrique. On peut aussi utiliser successivement les formules (T13) et (T12) pour transformer le premier terme et les formules (T7) et (T6) pour transformer le deuxième terme. Finalement

$$\begin{array}{ll} & \sin(-\pi + \alpha) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\alpha) \\ \text{et} & \cos(-\pi + \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \text{donc} & E = -\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \end{array}$$

- On utilise la formule (T10) pour transformer le premier terme. On utilise successivement les formules (T13) et (T11) pour transformer le deuxième terme. Finalement

$$\begin{array}{ll} & \sin(12\pi + \alpha) = \sin(\alpha) \\ \text{et} & \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha) \\ \text{donc} & F = \sin(\alpha) + 2\cos(\alpha) \end{array}$$

- On utilise successivement les formules (T10) et (T11) pour écrire

$$G = \sin\left(\pi - \frac{(10-1)\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-4\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

- On peut simplifier directement l'expression via une lecture sur le cercle trigonométrique. On peut aussi utiliser successivement les formules (T10), (T13) et (T11) pour transformer le premier terme et la formule (T7) pour transformer le deuxième terme. Finalement

$$\begin{array}{ll} & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha) \\ \text{et} & \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \text{donc} & H = 0 \end{array}$$

- On utilise successivement les formules (T10) et (T12) pour transformer le premier terme. On utilise les formules (T7) et (T5) pour transformer le deuxième terme. Finalement

$$\begin{array}{ll} & \sin(7\pi - \alpha) = \sin(6\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \\ \text{et} & \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \\ \text{donc} & I = 2\sin(\alpha) \end{array}$$

- On distingue deux cas. Si k est pair, la formule (T4) assure que $J = \cos(\alpha)$. Si k est impair, la formule (T3) assure que $J = -\cos(\alpha + (k-1)\pi)$; dans ce cas, $k-1$ est pair donc la formule (T4) assure que $J = -\cos(\alpha)$. On peut regrouper les deux cas en notant que $J = (-1)^k \cos(\alpha)$.
- La formule (T11) assure que $K = \cos(k\pi - \alpha)$. On distingue alors deux cas. Si k est pair, les formules (T4) et (T7) assurent que $K = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Si k est impair, on note que $K = \cos((k-1)\pi + \pi - \alpha)$ et que $k-1$ est pair donc les formules (T4) et (T6) assurent que $K = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$. On peut regrouper les deux cas en notant que $K = (-1)^k \cos(\alpha)$.

Correction de l'exercice 112

- L'usage de la formule (T16) permet d'écrire

$$A = \sqrt{2}\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos(x)\right) = \sin(x) + \cos(x)$$

- On gère le premier terme de B avec la relation (T17). On simplifie l'écriture du deuxième terme de B à l'aide de la relation (T4) comme dans l'exercice 42, puis on utilise la relation (T15). On ajoute enfin les deux termes réécrits.

$$\begin{array}{ll} & \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(x) \\ \text{et} & \cos\left(x - \frac{27\pi}{4}\right) = \cos\left(x - 6\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \\ & \qquad = \cos(x)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ & \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(x) \\ \text{donc} & B = \sqrt{2}\sin(x) \end{array}$$

- On simplifie les deux termes de C à l'aide des relations (T4) et (T10) comme dans l'exercice 42, puis on utilise la relation (T15) pour écrire le deuxième facteur de C sous la forme voulue. Il ne reste plus qu'à faire le produit des deux facteurs réécrits.

$$\begin{array}{ll} & \cos\left(-x + \frac{51\pi}{4}\right) = \cos\left(-x + \frac{(48+3)\pi}{4}\right) = \cos\left(-x + 12\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) \\ & \qquad = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(x) \\ & \qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(x) \\ \text{et} & \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{(8+1)\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{donc} & C = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} \end{array}$$

- On simplifie l'écriture de D à l'aide de la relation (T4) comme dans l'exercice 42, puis on utilise la relation (T15) pour conclure.

$$D = \cos\left(8\pi - x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \frac{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)}{2}$$

- On simplifie les deux termes de E à l'aide des relations (T4) et (T10) comme dans l'exercice 42. On met ensuite chacun de ces termes sous la forme voulue à l'aide de la relation (T16) pour le premier terme et (T14) pour le second. Il reste à effectuer la combinaison linéaire des deux termes obtenus, en simplifiant les facteurs numériques apparaissant.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{3}+x\right) &= \sin\left(\frac{(6+1)\pi}{3}+x\right) = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos(x)+\frac{1}{2}\times\sin(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{23\pi}{6}\right) &= \cos\left(x-\frac{(24-1)\pi}{6}\right) = \cos\left(x-4\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos(x)-\frac{1}{2}\times\sin(x)\end{aligned}$$

donc $E = \frac{3}{2}\times\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(x)-\left(\frac{1}{2}\times\cos(x)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\sin(x)\right) = \cos(x)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\sin(x)$

Or $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

donc $E = \cos(x)+\frac{2\sin(x)}{\sqrt{3}}$

Correction de l'exercice 113

Dans cet exercice, on utilise systématiquement le fait que pour tout entier n et tout réel x, $\big(\cos(x)\big)^{2n} = \big(1-\big(\sin(x)\big)^2\big)^n$.

- $A = 2\big(\sin(x)\big)^3-\sin(x)\big(1-\big(\sin(x)\big)^2\big) = 3\big(\sin(x)\big)^3-\sin(x)$
- $B = \big(1-\big(\sin(x)\big)^2\big)^2+3\big(\sin(x)\big)^2 = 1+\big(\sin(x)\big)^2+\big(\sin(x)\big)^4$
- $C = \big(1-\big(\sin(x)\big)^2\big)^2+\big(\sin(x)\big)^4-2\big(1-\big(\sin(x)\big)^2\big) = 2\big(\sin(x)\big)^4-1$

Correction de l'exercice 114

1. Les formules (T14) et (T15) permettent respectivement d'écrire

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

et

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2. En simplifiant l'argument de chacun des cosinus calculés, on note que le premier réel étudié dans la question précédente est $\cos(x)$ alors que le second est $\cos(y)$. Il s'ensuit que $\cos(x)+\cos(y)$ est la somme des deux réels estimés. Finalement

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Correction de l'exercice 115

Allez relire les indications de l'exercice 43. Chaque étude est résumée sur un des schéma ci-dessous.

1. L'ensemble des réels t appartenant à $[-7\pi\,;-5\pi]$ tels que $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ est $\left\{-\frac{20\pi}{3},-\frac{16\pi}{3}\right\}$.
2. L'ensemble des réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left\{\frac{10\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right\}$.
3. L'ensemble des réels t appartenant à $[-\pi\,;2\pi]$ tels que $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$.
4. L'ensemble des réels t appartenant à $[11\pi\,;12\pi]$ tels que $\sin(t) = \frac{1}{2}$ est vide.
5. L'ensemble des réels t appartenant à $[\pi\,;2\pi]$ tels que $\cos(t) \leqslant \frac{1}{2}$ est $\left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right]$.
6. L'ensemble des réels t appartenant à $[-\pi/2\,;\pi/2]$ tels que $\sin(t) \geqslant \frac{1}{2}$ est $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

7 . L'ensemble des réels t appartenant à $[-6\pi\,;-2\pi]$ tels que $\cos(t) \geqslant 0$ est $\left[-6\pi;-\frac{11\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{9\pi}{2};-\frac{7\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{5\pi}{2};-2\pi\right]$.

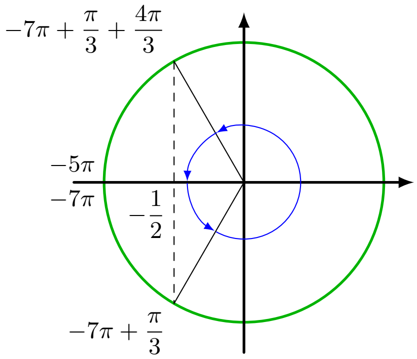
8 . L'ensemble des réels t appartenant à $[0\,;5\pi]$ tels que $\cos(t) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left[\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{6};\frac{19\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{29\pi}{6};5\pi\right]$.

9 . L'ensemble des réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $|\sin(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ est l'ensemble des réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est à dire $\left[2\pi;\frac{9\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{4};\frac{13\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{4};4\pi\right]$.

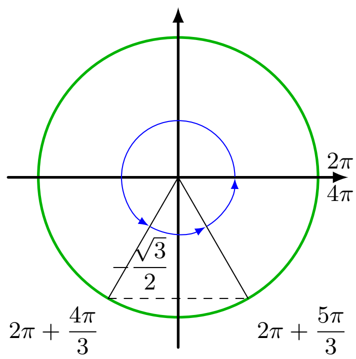
10 . On note que pour tout $t \in [0\,;2\pi]$, $t+\pi/4 \in [\pi/4\,;9\pi/4]$. On cherche donc les solutions de l'équation $\sin(t) = 1/\sqrt{2}$ d'inconnue $t \in [\pi/4\,;9\pi/4]$ dont les solutions se lisent sur le cercle trigonométrique et sont $\pi/4$, $3\pi/4$ et $9\pi/4$. Les réels cherchés sont donc les réels t tels que $t+\pi/4$ appartienne à $\{\pi/4, 3\pi/4, 9\pi/4\}$. Autrement dit, l'ensemble des réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$.

11 . On note que pour tout $t \in [0\,;\pi]$, $2t+\pi/6 \in [\pi/6\,;13\pi/6]$. On cherche donc les solutions de l'équation $\sin(t) = 1/\sqrt{2}$ d'inconnue $t \in [\pi/6\,;13\pi/6]$ dont les solutions se lisent sur le cercle trigonométrique et sont $\pi/4$ et $3\pi/4$. Les réels cherchés sont donc les réels t tels que $2t+\pi/6$ appartienne à $\{\pi/4, 3\pi/4\}$. Autrement dit, l'ensemble des réels t appartenant à $[0\,;\pi]$ tels que $\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\left\{\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right\}$.

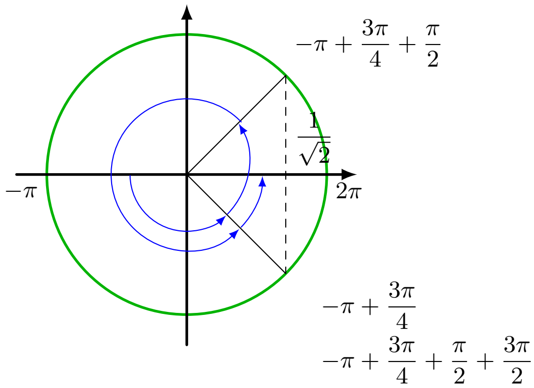
question 1



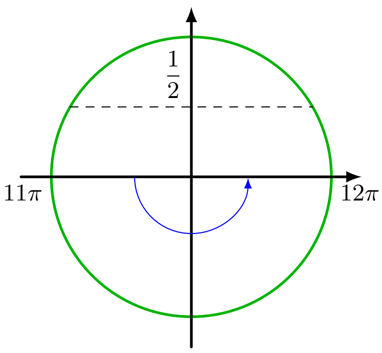
question 2



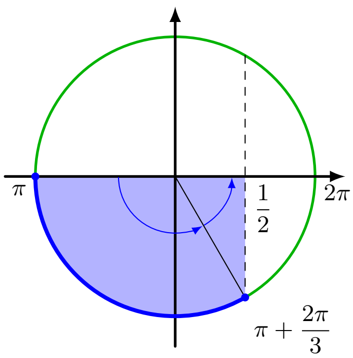
question 3



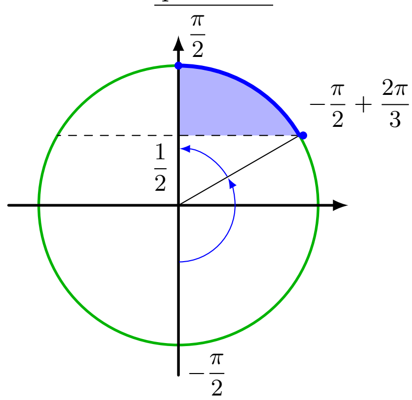
question 4



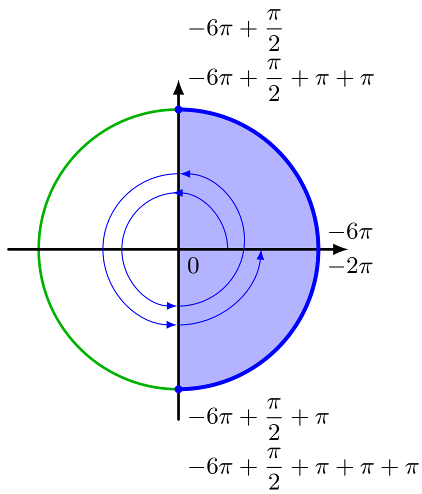
question 5



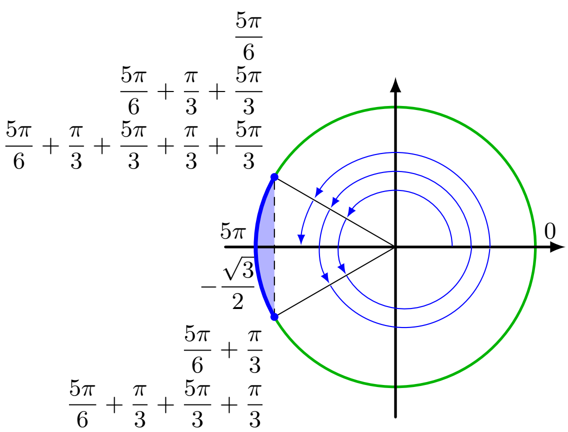
question 6



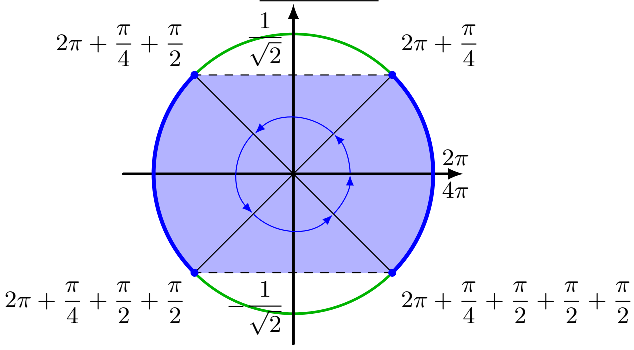
question 7



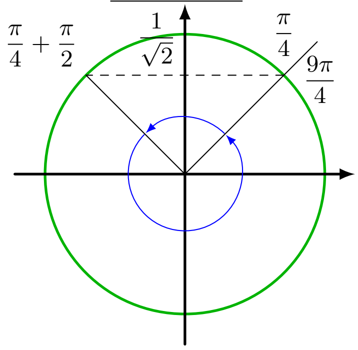
question 8



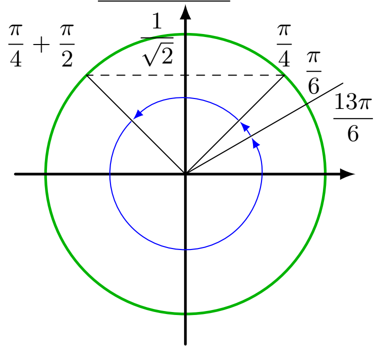
question 9



question 10



question 11



Correction de l'exercice 116

Allez impérativement lire les indications de cet exercice permettant d'optimiser les calculs avant de lire ce corrigé.

- $z_1 = 3\mathrm{i}^2 - 8 \times 3\mathrm{i} + 4\mathrm{i} - 4 \times 8 = -35 - 20\mathrm{i}$
- Redistribuer les signes $-$ d'une autre manière permet de minimiser leur nombre et d'éviter des erreurs de calcul.
$$z_2 = (\mathrm{i} - 4)(2\mathrm{i} + 3) = 2\mathrm{i}^2 + 3\mathrm{i} - 4 \times 2\mathrm{i} - 4 \times 3 = -14 - 5\mathrm{i}$$
- On utilise la technique développée dans l'exercice 8 pour développer efficacement le cube d'une somme.
$$z_3 = (2\mathrm{i})^3 + 3 \times (2\mathrm{i})^2 + 3 \times 2\mathrm{i} + 1 = -8\mathrm{i} - 12 + 6\mathrm{i} + 1 = -11 - 2\mathrm{i}$$
- $z_4 = (3 - \mathrm{i})(4 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2) = (3 - \mathrm{i})(3 + 4\mathrm{i}) = 9 + 12\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2 = 13 + 9\mathrm{i}$
- Changer le signe du complexe dont on calcule le carré ne change pas le résultat. Mais en diminuant le nombre de signe $-$, on minimise le risque de faire une erreur de calcul.
$$z_5 = (1 + 2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} + (2\mathrm{i})^2 = -3 + 4\mathrm{i}$$
- Ici encore, on change tous les signes avant de commencer le calcul. Cela permet d'avoir un conjugué du dénominateur dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives.
$$z_6 = \frac{1 - 2\mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}} = \frac{(1 - 2\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})}{|3 - 2\mathrm{i}|^2} = \frac{3 - 6\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2}{3^2 + 2^2} = \frac{7 - 4\mathrm{i}}{13}$$
Si on veut donner la forme algébrique exacte de z_6, on doit écrire $z_6 = \frac{7}{13} + \frac{-4}{13} \times \mathrm{i}$. En effet, le nombre z_6 doit être mis exactement sous la forme $a + b\mathrm{i}$ où a et b sont des réels. On se permettra dans la fin de cet exercice d'écrire les complexes demandés sous la forme $\lambda(a + b\mathrm{i})$ où a, b et λ sont des réels, si cette écriture est plus naturelle. C'est en particulier le cas où, comme dans cette question, la partie réelle et la partie imaginaire du complexe manipulé sont des rationnels de même dénominateur.
- Il est raisonnable de mettre en facteur tous les réels possibles dans le dénominateur de z_3 de telle sorte que le conjugué de ce dénominateur ait des coefficients les plus petits possible, tout en restant des entiers.
$$z_7 = \frac{1 - 4\mathrm{i}}{3(5 + \mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})} = \frac{1 - 4\mathrm{i}}{3(5 - 10\mathrm{i} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2)} = \frac{1 - 4\mathrm{i}}{3(7 - 9\mathrm{i})} = \frac{(1 - 4\mathrm{i})(7 + 9\mathrm{i})}{3(7^2 + 9^2)} = \frac{7 - 28\mathrm{i} + 9\mathrm{i} - 36\mathrm{i}^2}{390} = \frac{43 - 19\mathrm{i}}{390}$$
- Il est plus efficace d'écrire z_8 sous la forme du carré d'un quotient. En effet, après écriture du quotient sous forme algébrique, il ne restera qu'un carré à effectuer. L'usage de la forme initiale conduit en revanche à calculer deux carrés. De plus, comme dans l'exemple précédent, mettre en facteur tous les réels possibles dans le dénominateur d'un quotient avant de mettre ce dernier sous forme algébrique est une bonne idée pour minimiser la grandeur des nombres mis en jeu.
$$z_8 = \left(\frac{3 - 2\mathrm{i}}{2(1 - \mathrm{i})}\right)^2 = \left(\frac{(3 - 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{2(1^2 + 1^2)}\right)^2 = \left(\frac{3 - 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2}{4}\right)^2 = \frac{(5 + \mathrm{i})^2}{16} = \frac{25 + 10\mathrm{i} + \mathrm{i}^2}{16} = \frac{24 + 10\mathrm{i}}{16} = \frac{12 + 5\mathrm{i}}{8}$$
Ne pas oublier la simplification finale.
- On utilise la technique développée dans l'exercice 8 pour développer efficacement le cube d'une somme.
$$z_9 = (\sqrt{3})^3 + 3 \times (\sqrt{3})^2 \times 2\mathrm{i} + 3\sqrt{3} \times (2\mathrm{i})^2 + (2\mathrm{i})^3 = 3\sqrt{3} + 18\mathrm{i} - 12\sqrt{3} - 8\mathrm{i} = -9\sqrt{3} + 10\mathrm{i}$$
- On peut effectuer le développement de z_{10} sans difficulté. On obtient ainsi
$$z_{10} = (16 + 8\mathrm{i} + \mathrm{i}^2) - ((-\mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i} + 1) = (15 + 8\mathrm{i}) - (-2\mathrm{i}) = 15 + 10\mathrm{i}$$

On peut aussi anticiper le fait que l'identité remarquable (IR3) va conduire à une calcul simple puisque la partie imaginaire de chaque complexe apparaissant dans un carré est 1 donc que la différence de ces deux complexes est réelle. On obtient ainsi en utilisant (IR3),

$$z_{10} = (4 + \mathrm{i} - \mathrm{i} + 1)(4 + \mathrm{i} + \mathrm{i} - 1) = 5(3 + 2\mathrm{i})$$

C'est un peu plus rapide...

- Pour élever au carré le deuxième terme de la somme formant z_{11}, il est pertinent d'écrire carré des quotients sous la forme d'un quotient de carrés afin d'éviter de travailler dans $\mathbb{Q}$ dès le début du calcul. N'oubliez pas aussi de simplifier les fractions au fur et à mesure de la progression du calcul.

$$z_{11} = 12 \times \frac{\mathrm{i}^3}{8} - \frac{(\mathrm{i}-3)^2}{4} = -\frac{3\mathrm{i}}{2} - \frac{\mathrm{i}^2 - 6\mathrm{i} + 9}{4} = -\frac{3\mathrm{i}}{2} - \frac{8 - 6\mathrm{i}}{4} = -\frac{3\mathrm{i}}{2} - \frac{4 - 3\mathrm{i}}{2} = -2$$

- $z_{12} = 4\mathrm{i} - \dfrac{(1-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{3^2+2^2} = 4\mathrm{i} - \dfrac{3 - 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2}{13} = 4\mathrm{i} - \dfrac{5 - \mathrm{i}}{13} = \dfrac{52\mathrm{i} - (5 - \mathrm{i})}{13} = \dfrac{-5 + 53\mathrm{i}}{13}$
- Il est peu probable que l'on puisse calculer une puissance d'ordre 19 ou 20 de complexes. On espère donc que le quotient des complexes mis en jeu a une forme simple.

$$z_{13} = (1-\mathrm{i})\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20} = (1-\mathrm{i})\left(\frac{(1+\mathrm{i})^2}{1^2+1^2}\right)^{20} = (1-\mathrm{i})\left(\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}\right)^{20} = (1-\mathrm{i})\mathrm{i}^{20} = (1-\mathrm{i})(\mathrm{i}^4)^5 = 1 - \mathrm{i}$$

puisque $\mathrm{i}^4 = 1$.

- Mettre les deux fractions au même dénominateur permet de n'avoir à manipuler qu'un quotient et pas deux; c'est donc une opération pertinente. Faites attention à choisir un dénominateur adapté au problème, à savoir $(\mathrm{i}+3)^2$ et pas $(\mathrm{i}+3)^3$ qui est le produit des deux dénominateurs mis en jeu mais induit beaucoup plus de calcul. Encore une fois, pensez aussi à simplifier les fractions au fur et à mesure de l'avancée du calcul.

$$z_{14} = \frac{2}{\mathrm{i}+3} - \frac{4\mathrm{i}}{(\mathrm{i}+3)^2} = \frac{2(3+\mathrm{i}) - 4\mathrm{i}}{(\mathrm{i}+3)^2} = \frac{2(3-\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2+6\mathrm{i}+9} = \frac{2(3-\mathrm{i})}{8+6\mathrm{i}} = \frac{3-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{(3-\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{4^2+3^2} = \frac{9-13\mathrm{i}}{25}$$

- $z_{15} = -\mathrm{i}\big((\mathrm{i})^2 + 4\mathrm{i} + 4 - 4(\mathrm{i})^2 + 4\mathrm{i}\big) = -\mathrm{i}(7 + 8\mathrm{i}) = 8 - 7\mathrm{i}$
- Il est raisonnable de mettre en facteur tous les réels possibles dans le dénominateur de z_3 de telle sorte que le conjugué de ce dénominateur ait des coefficients les plus petits possible, tout en restant des entiers. On utilise de plus la technique développée dans l'exercice 8 pour développer efficacement le cube d'une somme.

$$z_{16} = \frac{3+\mathrm{i}}{3^3(1+2\mathrm{i})^3} = \frac{3+\mathrm{i}}{27(1 + 3\times 2\mathrm{i} + 3\times(2\mathrm{i})^2 + (2\mathrm{i})^3)} = \frac{3+\mathrm{i}}{27(1 + 6\mathrm{i} - 12 - 8\mathrm{i})} = -\frac{3+\mathrm{i}}{27(11+2\mathrm{i})}$$

Encore une fois, on minimise le nombre de signe $-$ pour diminuer le risque de faire des erreurs de calcul.

$$z_{16} = -\frac{(3+\mathrm{i})(11-2\mathrm{i})}{27(11^2+2^2)} = -\frac{33 - 6\mathrm{i} + 11\mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2}{27\times 125} = -\frac{35+5\mathrm{i}}{27\times 125} = -\frac{7+\mathrm{i}}{27\times 25} = -\frac{7+\mathrm{i}}{675}$$

en simplifiant encore la fraction finale.

Correction de l'exercice 117

Dans cet exercice, on raisonne par équivalences. Les différentes égalités écrites sont liées par le symbole $\iff$ qui signifie «si et seulement si». Deux égalités ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Vous pourrez voir des exemples de ce raisonnement en relisant le corrigé de l'exercice 19. Il faut aussi lire les indications de l'exercice 116 pour savoir comment minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique des complexes.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$-\mathrm{i}z + 4 = -2\mathrm{i} \iff z = \frac{-4-2\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} \iff z = \mathrm{i}(-4-2\mathrm{i}) \iff z = 2 - 4\mathrm{i}$$

Finalement $2 - 4\mathrm{i}$ est le seul complexe solution de l'équation proposée.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(3-\mathrm{i})z + 7 = -2 + 4\mathrm{i}z \iff (3-5\mathrm{i})z = -9 \iff z = \frac{-9}{3-5\mathrm{i}} \iff z = \frac{-9(3+5\mathrm{i})}{3^2+5^2} \iff z = \frac{-9(3+5\mathrm{i})}{34}$$

Finalement $\dfrac{-9(3+5\mathrm{i})}{34}$ est le seul complexe solution de l'équation proposée. Si on veut donner la forme algébrique exacte de la solution de notre équation, on doit écrire cette dernière sous la forme $\dfrac{-27}{34} + \dfrac{-45}{34} \times \mathrm{i}$. En effet, cette solution doit être mise exactement sous la forme $a + b\mathrm{i}$ où a et b sont des réels. On se permettra dans la fin de cet exercice d'écrire les complexes demandés sous la forme $\lambda(a + b\mathrm{i})$ où a, b et λ sont des réels, si cette écriture est plus naturelle. C'est en particulier le cas où, comme dans cette question, la partie réelle et la partie imaginaire du complexe manipulé sont des rationnels de même dénominateur.

3 • Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(3-\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})+7=-2+4\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(z+1) &\iff (3-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}(3-\mathrm{i})+7=-2+(4\mathrm{i}-4)z+4\mathrm{i}-4\\ &\iff (7-5\mathrm{i})z=-11+10\mathrm{i}\\ &\iff z=\frac{-11+10\mathrm{i}}{7-5\mathrm{i}}=\frac{(-11+10\mathrm{i})(7+5\mathrm{i})}{7^2+5^2}=\frac{-127+15\mathrm{i}}{74}\end{aligned}$$

Finalement $\dfrac{-127+15\mathrm{i}}{74}$ est le seul complexe solution de l'équation proposée.

4 • Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{4\mathrm{i}\}$.

$$\begin{aligned}\frac{(3-\mathrm{i})z+7}{4+\mathrm{i}z}=2-\mathrm{i} &\iff (3-\mathrm{i})z+7=(2-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}z)\\ &\iff (3-\mathrm{i})z+7=4(2-\mathrm{i})+(2\mathrm{i}+1)z\\ &\iff (2-3\mathrm{i})z=1-4\mathrm{i}\\ &\iff z=\frac{1-4\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}\frac{(1-4\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{2^2+3^2}=\frac{14-5\mathrm{i}}{13}\end{aligned}$$

Finalement $\dfrac{14-5\mathrm{i}}{13}$ est le seul complexe solution de l'équation proposée.

Correction de l'exercice 118

Vues les opérations mises en jeu, il peut ne exister de valeurs de t à écarter que lors du calcul d'inverse; en effet dans ce cas, le complexe par lequel on divise doit être non nul. Autrement dit, déterminer les valeurs de t à écarter consiste à résoudre une équation de la forme $F(t)=0$ d'inconnue réelle t. On doit donc raisonner par équivalences. Les différentes égalités écrites sont liées par la locution «si et seulement si» ou par le symbole $\iff$. Deux égalités ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Vous pourrez voir des exemples de ce raisonnement en relisant le corrigé de l'exercice 19. Il faut aussi lire les indications de l'exercice 116 pour savoir comment minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique des complexes.

- On ne peut calculer z_1 que si $z \neq \mathrm{i}$. Or $z=\mathrm{i}$ si et seulement si $t+1-\mathrm{i}t=\mathrm{i}$ si et seulement si $t+1=0$ et $-t=1$ en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire de deux complexes égaux. On en déduit que $z=\mathrm{i}$ si et seulement si $t=-1$. Dans cette question, on suppose donc que $t\neq -1$. On calcule alors, en mettant en facteur tous les réels possibles dans le dénominateur de z_1 avant de mettre ce dernier sous forme algébrique,

$$z_1=\frac{1}{t+1-(t+1)\mathrm{i}}=\frac{1}{t+1}\times\frac{1}{1-\mathrm{i}}=\frac{1}{t+1}\times\frac{1+\mathrm{i}}{1^2+1^2}=\frac{1+\mathrm{i}}{2(t+1)}$$

- $z_2=(t+1+\mathrm{i}t)^2=(t+1)^2+2t(t+1)\mathrm{i}+(\mathrm{i}t)^2=(t+1)^2+2t(t+1)\mathrm{i}-t^2=2t+1+2t(t+1)\mathrm{i}$.

  Le développement de la partie réelle de z_2 est naturelle vue la simplification qu'elle induit et que l'on doit savoir anticiper. Mais développer la partie imaginaire de z_2 n'est pas utile. On sait que le résultat obtenu ne sera pas plus court à écrire. Tant que l'on ne sait pas à quoi va servir le résultat d'un calcul, on ne peut pas choisir la forme de ce résultat et faire des calculs sans objectif est toujours une mauvaise idée. On pourra revoir à ce sujet l'exemple proposé dans le corrigé de l'exercice 2.

- On note que $t+1+\mathrm{i}t=0$ si et seulement si $t+1=0$ et $t=0$, ce qui est impossible. Toutes les valeurs de t sont donc licites dans cette question.

$$z_3=\frac{t+1-\mathrm{i}t}{t+1+\mathrm{i}t}=\frac{(t+1-\mathrm{i}t)^2}{(t+1)^2+t^2}=\frac{(t+1)^2-2t(t+1)\mathrm{i}+(\mathrm{i}t)^2}{2t^2+2t+1}=\frac{2t+1-2t(t+1)\mathrm{i}}{2t^2+2t+1}$$

- On ne peut calculer z_4 que si $(2+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-8\neq 0$. Plutôt que résoudre une équation comme dans la première question, on va commencer à écrire le complexe $(2+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-8$ sous forme algébrique; si cela permet de savoir directement si $(2+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-8$ peut être nul, tant mieux! Dans le cas contraire, cette transformation est de toute manière la première étape de la résolution de l'équation permettant de connaître les valeurs de t à écarter. On note que

$$(2+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-8=(2+\mathrm{i})(t+1-\mathrm{i}t)+\mathrm{i}-8=2(t+1)-2\mathrm{i}t+(t+1)\mathrm{i}+t+\mathrm{i}-8=3t-6+(2-t)\mathrm{i}=(t-2)(3-\mathrm{i})$$

  Comme $3-\mathrm{i}\neq 0$, il est clair que $(2+\mathrm{i})z+\mathrm{i}-8$ est nul si et seulement si $t=2$. On suppose donc à présent que $t\neq 2$ et on exploite le calcul qui vient d'être fait pour mettre en facteur tous les réels possibles dans le dénominateur de z_4 avant de mettre ce dernier sous forme algébrique,

$$z_4=\frac{1}{t-2}\times\frac{1}{3-\mathrm{i}}=\frac{1}{t-1}\times\frac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2}=\frac{3+\mathrm{i}}{10(t-1)}$$

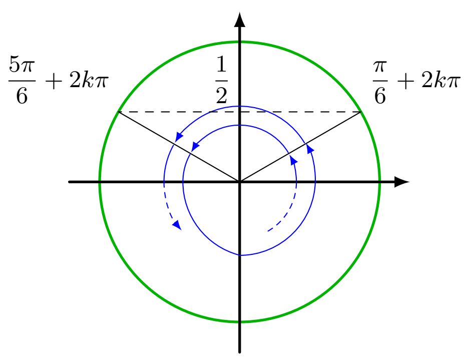
Correction de l'exercice 119

Vues les opérations mises en jeu, il peut ne exister de valeurs de t à écarter que lors du calcul d'inverse; en effet dans ce cas, le complexe par lequel on divise doit être non nul. Autrement dit, déterminer les valeurs de t à écarter consiste à résoudre une équation de la forme $F(t) = 0$ d'inconnue réelle t. On doit donc raisonner par équivalences. Les différentes égalités écrites sont liées par la locution «si et seulement si» ou le symbole $\Longleftrightarrow$. Deux égalités ainsi liées ont des valeurs logiques inconnues mais identiques; elles peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. Vous pourrez voir des exemples de ce raisonnement en relisant le corrigé de l'exercice 19. Il faut aussi lire les indications de l'exercice 116 pour savoir comment minimiser les calculs lors de la mise sous forme algébrique des complexes et lire les indications de cet exercice pour être plus efficaces sur le problème posé.

- Ce premier exemple ne met en jeu que des sommes et des produits. Plutôt qu'écrire z_1 sous forme algébrique, on effectue un développement partiel permettant de calculer la partie imaginaire de z_1, ce qui permet de conclure puisque z_1 est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On note ainsi que $z_1 = (t+1)(-1+\mathrm{i}t) - (t+2\mathrm{i})$ donc $\mathrm{Im}(z_1) = t(t+1) - 2$. Le complexe z_1 est réel si et seulement si $t^2 + t - 2 = 0$ si et seulement si $t \in \{-2, 1\}$.
- On gère z_2 comme on a géré z_1, le calcul étant même plus simple puisque la partie réelle de chaque terme formant z_2 est élémentaire à trouver et que la partie imaginaire d'une somme de complexes est la somme des parties imaginaires des complexes mis en jeu. On note ainsi que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(z_2) &= (t-1)^3 + (t-3)^2 + 2(t-2)(t+2)\\ &= (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + (t^2 - 6t + 9) + 2(t^2 - 4)\\ &= t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})\end{aligned}$$

  en utilisant (IR3) pour la dernière étape de la factorisation. Sous cette forme, il apparaît clairement que le complexe z_2 est réel si et seulement si si $t \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.
- Comme t est un réel, $t + 1 - \mathrm{i} \neq 0$. Le complexe z_3 est donc correctement défini pour toutes les valeurs de t. On peut alors proposer plusieurs méthodes pour déterminer les valeurs de t pour lesquelles z_3 est un réel; toutes conduisent au même calcul, présenté de manière un peu différente à chaque fois.
  - On peut simplement écrire z_3 sous forme algébrique pour déterminer la partie imaginaire de ce complexe. On note ainsi que
  $$z_3 = \frac{(t+1-\mathrm{i})^2}{(t+1)^2 + 1^2} = \frac{(t+1)^2 - 2(t+1)\mathrm{i} + \mathrm{i}^2}{(t+1)^2 + 1} = \frac{(t+1)^2 - 1 - 2(t+1)\mathrm{i}}{(t+1)^2 + 1}$$
  $$\text{donc} \quad \mathrm{Im}(z_3) = -\frac{2(t+1)}{(t+1)^2 + 1}$$
  Donc z_3 est réel si et seulement si $t = -1$. Notez que l'on n'a pas développé le dénominateur de z_3 puisque seul son caractère réel nous importe, ni la partie réelle du numérateur de z_3 dont on se moque. Comme toujours, on limite les calculs à ceux qui sont utiles pour conclure.
  - On peut noter que si a et c sont des complexes tel que $c \neq 0$, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a\,\overline{c}}{|c|^2}$. Comme $|c|^2$ est un réel, on sait que $\dfrac{a}{c}$ est réel si et seulement si $a\,\overline{c}$ est réel. Dans notre cas, le complexe z_3 est réel si et seulement si $(t+1+\mathrm{i})^2$ est réel. On écrit alors ce complexe sous forme algébrique pour conclure. Cela conduit exactement au même calcul qu'avec la première méthode mais on n'est pas conduit à écrire le dénominateur du complexe manipulé.
  - On sait que z_3 est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué si et seulement si $(t+1+\mathrm{i})^2$ est réel. On retrouver alors les calculs des deux premières méthodes. On peut aussi continuer par équivalences. Plutôt que développer chaque membre de la relation finale, on utilise l'identité remarquable (IR3). On en déduit que z_3 est réel si et seulement si
  $$\big((t+1+\mathrm{i}) - (t+1-\mathrm{i})\big)\big((t+1+\mathrm{i}) + (t+1-\mathrm{i})\big) = 0 \text{ si et seulement si } 4\mathrm{i}(t+1) = 0$$
  Finalement, on trouve à nouveau que le complexe z_3 est réel si et seulement si $t = -1$.
- Le complexe z_4 est réel si et seulement si $2\sin(t) - 1 = 0$. La lecture du cercle trigonométrique, codée par le schéma ci-dessous, assure que z_4 est réel si et seulement si $t \in \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



- On peut gérer le cas de z_5 comme celui de z_1, c'est à dire en déterminant la partie imaginaire de ce nombre. Cela conduit en premier lieu à développer le carré de ce complexe. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} z_5 &= (t+1)^4 + 4t(2t-1)(t+1)^2\mathrm{i} + \big(2t(2t-1)\mathrm{i}\big)^2 \\ &= (t+1)^4 - \big(2t(2t-1)\big)^2 + 4t(2t-1)(t+1)^2\mathrm{i} \end{aligned}$$

donc $\quad \mathrm{Im}(z_4) = 4t(2t-1)(t+1)^2$

Encore une fois, on ne modifie en rien l'écriture de la partie réelle de z_5 qui ne nous importe pas. Comme la partie imaginaire de z_5 est une expression polynomiale entièrement factorisée, on peut directement conclure. Le complexe z_5 est réel si et seulement si $4t(2t-1)(t+1) = 0$ si et seulement si $t \in \{-1, 0, 1/2\}$. On pouvait ne pas développer le carré initial. En effet, si a est un complexe, a^2 est réel si et seulement si a est réel ou imaginaire pur. Dans notre cas, on sait donc que z_5 est réel si et seulement si $(t+1)^2 + 2t(2t-1)\mathrm{i}$ est un réel ou le produit d'un réel par i si et seulement si $2t(2t-1) = 0$ ou $(t+1)^2 = 0$ si et seulement si $t \in \{-1, 0, 1/2\}$. On retrouve bien la même conclusion sans calcul.

- Pour gérer le complexe z_6, il faut déjà écarter les valeurs de t pour lesquelles ce complexe n'est pas défini, c'est à dire pour lesquelles son dénominateur est nul. On commence donc par écrire la forme algébrique de ce dénominateur. On calcule alors, en utilisant l'identité remarquable (IR3) lors de la factorisation de la cinquième étape, que

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\mathrm{i}t+1)^2 + 2 &= \mathrm{i}\big((\mathrm{i}t)^2 + 2\mathrm{i}t + 1\big) + 2 \\ &= \mathrm{i}\big(-t^2 + 2\mathrm{i}t + 1\big) + 2 \\ &= -\mathrm{i}t^2 - 2t + \mathrm{i} + 2 \\ &= 2 - 2t + \mathrm{i}(1-t^2) \\ &= 2(1-t) + \mathrm{i}(1-t)(1+t) \\ &= (1-t)(2+\mathrm{i}(1+t)) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on note que le complexe z_6 est correctement défini si et seulement si $t \neq 1$. Dans toute la suite, on suppose donc que cette contrainte est vérifiée. Comme $t-1$ est un réel non nul, z_6 est réel si et seulement si $(1-t)/z_6$ l'est; cette remarque permet de simplifier notablement les calculs mis en jeu. En effet, il s'agit à présent de trouver les valeurs de t pour lesquelles le complexe

$$z_7 = \frac{2+\mathrm{i}(1+t)}{2\mathrm{i}-1}$$

est réel. Or $z_7 = \dfrac{\big(2+\mathrm{i}(1+t)\big)(2\mathrm{i}+1)}{2^2+1^2} = \dfrac{4\mathrm{i}+2+2(1+t)\mathrm{i}^2+\mathrm{i}(1+t)}{5} = \dfrac{-2t+(5+t)\mathrm{i}}{5}$.

Finalement, le complexe z_6 est réel si et seulement si le complexe z_7 est réel si et seulement si $t = -5$.

Correction de l'exercice 120

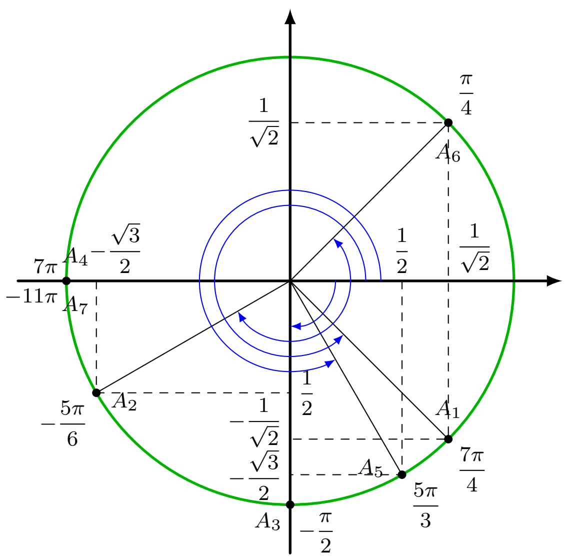
Vous pourrez relire les corrigés des exercices 54 et 55. La technique utilisée pour trouver des arguments plus petits définissant le même complexe a aussi été travaillée dans l'exercice 41 dont vous pourrez aussi étudier le corrigé une nouvelle fois.

- Notons d'abord que

$$47 = 3 \times 14 + 5 \text{ donc } \frac{47\pi}{3} = 14\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ donc } z_5 = \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3}.$$

et $\quad -23 = -6 \times 4 + 1$ donc $-\dfrac{23\pi}{4} = -6\pi + \dfrac{\pi}{4}$ donc $z_6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

- On a placé sur le schéma ci-contre les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 et A_7 d'affixe respective z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 et z_7 puis complété ce schéma avec les abscisses et ordonnées des points placés. On lit alors directement les formes algébriques des complexes étudiés, à savoir



$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \qquad z_3 = -\mathrm{i}$$

$$z_4 = -1 \qquad z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad z_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$$

$$z_7 = -1$$

Correction de l'exercice 121

Pour chaque complexe z donné, on peut calculer $|z|$ en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire de z puis écrire explicitement le complexe $z/|z|$ afin de lire un argument de z sur le cercle trigonométrique. Ceci étant, peu de complexes ont une forme trigonométrique explicitement connue: ce sont les multiples par un réel non nul de 1, i, $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Il est donc possible de «deviner» le réel strictement positif qu'il faut mettre en facteur dans chaque complexe z fourni afin que la lecture d'un argument de z soit immédiate. Par exemple, pour mettre sous forme trigonométrique le complexe $z = 1 + \mathrm{i}$, on note que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont égales donc que la mise en facteur de $\sqrt{2}$ permet de conclure directement. Pour ce genre de manipulation, il peut être utile de de tracer rapidement le cercle trigonométrique donné page 34 du document des leçons si ce dernier n'est pas encore mémorisé.

$$z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \qquad z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} \qquad z_4 = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$$

$$z_5 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4} \qquad z_6 = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$$

$$z_7 = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \qquad z_8 = 2\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{6}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$

Correction de l'exercice 122

La forme trigonométrique est adaptée à la manipulation de produits, de quotients et, plus généralement, de puissances. Ces opérations sont bien plus pénibles à effectuer avec des complexes écrits sous forme algébrique. Il est donc judicieux d'écrire les complexes manipulés sous forme trigonométrique le plus rapidement possible. Sur ce thème, revoir l'exercice 58. Relire aussi le corrigé de l'exercice 121 pour revoir comment repérer rapidement les complexes dont une forme trigonométrique est connue. Si on est conduit à effectuer des produits, des quotients ou des puissances avec des formes algébriques, ne pas oublier d'optimiser les calculs en utilisant les «astuces» détaillées dans les indications de l'exercice 116.

- Les complexes apparaissant dans z_1 n'ont pas de forme trigonométrique connue. On effectue donc les calculs en utilisant la forme algébrique des complexes puis on traduit le résultat sous forme trigonométrique. On obtient ainsi
$$z_1 = (3+4\mathrm{i})(9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2) = (3+4\mathrm{i})(8+6\mathrm{i}) = 2(3+4\mathrm{i})(4+3\mathrm{i}) = 2\times 25\mathrm{i} = 50\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$$
- On a le même problème que dans le premier exemple. On travaille donc au départ avec les formes algébriques, en écrivant z_2 de manière à minimiser les élévations au cube et à ne pas avoir à manipuler de fractions.
$$z_2 = \frac{\big((2+3\mathrm{i})(5-\mathrm{i})\big)^3}{5^3} = \frac{(13-13\mathrm{i})^3}{125}$$
On reconnaît alors un nombre facile à mettre sous forme trigonométrique, ce qui permet d'achever le calcul sans difficulté. En effet
$$z_2 = \frac{(13\sqrt{2})^3}{125}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{4394\sqrt{2}}{125}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)^3 = \frac{4394\sqrt{2}}{125}\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}$$
Calculer explicitement les cubes des réels apparaissant est en fait facultatif.
- Dans le troisième exemple, les complexes formant z_3 se mettent directement sous forme trigonométrique. On effectue donc cette transformation avant d'effectuer les produits et les puissances.
$$z_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^2 = 2\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)^2 = \frac{8}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$$
- Dans le quatrième exemple, les complexes formant z_4 se mettent directement sous forme trigonométrique. On effectue donc cette transformation avant d'effectuer les produits et les puissances.
$$z_4 = \mathrm{i}\big(3\sqrt{2}\big)^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^3 = 54\sqrt{2}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\times\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)^3 = 54\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$$
- Dans le cinquième exemple, les complexes formant z_5 se mettent directement sous forme trigonométrique. On transforme cependant l'écriture de z_5 afin de minimiser le nombre de carré; même si élever au carré un nombre écrit sous forme trigonométrique est aisé, il est inutile de multiplier les opérations que l'on peut éviter.
$$z_5 = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$$

- On a le même problème que dans le premier exemple. On travaille donc au départ avec les formes algébriques, en écrivant z_6 de manière à minimiser les élévations au carré et à ne pas avoir à manipuler de fractions.

$$z_6 = \left(\frac{5+11\mathrm{i}\sqrt{3}}{7-4\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\big(5+11\mathrm{i}\sqrt{3}\big)\big(7+4\mathrm{i}\sqrt{3}\big)}{7^2+(4\sqrt{3})^2}\right)^2 = \left(\frac{35+77\mathrm{i}\sqrt{3}+20\mathrm{i}\sqrt{3}-132\mathrm{i}^2}{49+48}\right)^2 = \left(\frac{-97+97\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{97}\right)^2$$

donc $\quad z_6 = (-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 2^2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\big)^2 = 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$

Correction de l'exercice 123

Avant d'aborder cet exercice, il faut se souvenir des points suivants.

- Pour effectuer des produits, des quotients ou des puissances avec des formes algébriques, ne pas oublier d'optimiser les calculs en utilisant les «astuces» détaillées dans les indications de l'exercice 116. En particulier, il est toujours judicieux d'écrire les complexes sous la forme λz où λ est un réel et z est un complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers les plus petits possibles. Par exemple, travailler avec $8(3+2\mathrm{i})$ est bien plus pertinent que travailler avec $24+16\mathrm{i}$. Vous noterez ainsi que le calcul de l'inverse de ce nombre conduit directement à une forme simplifiée avec la première écriture, pas avec la seconde. En effet,

$$\frac{1}{8(3+2\mathrm{i})} = \frac{1}{8}\times\frac{3-2\mathrm{i}}{3^2+2^2} = \frac{3-2\mathrm{i}}{8\times 13} = \frac{3-2\mathrm{i}}{104}$$

et $\quad \dfrac{1}{24+16\mathrm{i}} = \dfrac{24-16\mathrm{i}}{24^2+16^2} = \dfrac{24-16\mathrm{i}}{832} = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{104}$

  Cette remarque nous conduira parfois à ne pas donner les résultats des calculs sous forme algébrique, c'est à dire sous la forme $a+\mathrm{i}b$ où a et b sont des réels, mais sous la forme $\lambda(a+\mathrm{i}b)$ où λ, a et b sont des réels, en particulier si cette écriture est plus lisible.

- La forme trigonométriques des complexe est adaptée pour effectuer des produits, des quotients, et plus généralement des puissances mais rend impossible la simplifications de sommes et de différences, sauf dans un cas particulier traité dans l'exercice de recherche 177. Au contraire, on sait faire tous les calculs avec la forme algébrique des complexes mais les produits et les quotients sont un peu plus longs à effectuer qu'avec la forme trigonométrique et les puissances d'ordre élevé ne sont pas raisonnablement gérables. Pour mener les calculs demandé de la manière la plus efficace possible, on doit donc adapter l'écriture des données aux opérations à effectuer. Il faut donc être capable de repérer rapidement les complexes dont la forme trigonométrique est connue. Sur ce point, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 121.

- Comme l'énoncé impose que les résultats des divers calculs soient donnés sous forme algébrique, il faut aussi savoir écrire rapidement sous cette forme un complexe donnée sous forme trigonométrique. Vous pourrez relire les corrigés des exercices 54 et 55. La technique utilisée pour trouver des arguments plus petits définissant le même complexe a aussi été travaillée dans l'exercice 41 dont vous pourrez étudier le corrigé une nouvelle fois.

- Le premier calcul ne met en jeu qu'une somme et un produit par un réel. La forme algébrique de chaque donnée est donc adaptée à la manipulation. On calcule ainsi

$$z_1 = 3+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = 2+\mathrm{i}\sqrt{3}$$

- Le numérateur et le dénominateur de z_2 mettent en jeu des sommes, que l'on ne sait pas gérer avec des formes trigonométriques. Il est donc naturel d'écrire ces complexes sous forme algébrique. Comme aucune forme trigonométrique classique n'apparaît et comme il ne reste de toute manière qu'un quotient à effectuer, on termine le calcul en ne manipulant que des formes algébriques.

$$z_2 = \frac{2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{i}}{2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)-\mathrm{i}} = \frac{1+\big(\sqrt{3}+1\big)\mathrm{i}}{1+\big(\sqrt{3}-1\big)\mathrm{i}} = \frac{\big(1+\big(\sqrt{3}+1\big)\mathrm{i}\big)\big(1+\big(\sqrt{3}-1\big)\mathrm{i}\big)}{1^2+(\sqrt{3}-1)^2}$$

  Plutôt que développer le numérateur sans réfléchir, on note qu'il s'écrit $\big((1+\sqrt{3}\mathrm{i})+\mathrm{i}\big)\big((1+\sqrt{3}\mathrm{i})-\mathrm{i}\big)$, ce que l'on développe plus efficacement en utilisant l'identité remarquable (IR3). Ainsi

$$z_2 = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2-\mathrm{i}^2}{5+2\sqrt{3}} = \frac{1+2\mathrm{i}\sqrt{3}+(\mathrm{i}\sqrt{3})^2+1}{5+2\sqrt{3}} = \frac{-1+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}$$

  La forme algébrique exacte de z_2 est $\dfrac{-1}{5+2\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}\mathrm{i}$. Comme indiqué dans l'introduction de ce corrigé, on se permet de ne pas respecter tout à fait la définition d'écriture algébrique lorsque cela simplifie l'écriture finale.

- Les données du problèmes sont sous forme trigonométrique et on doit effectuer des produits et des puissances. On manipule donc les complexes sous forme trigonométrique jusqu'au résultat final, à l'exception du facteur i que l'on conserve puisque le produit par i d'un complexe donné sous forme algébrique par est immédiat. On obtient ainsi

$$z_3 = \mathrm{i}e^{2\mathrm{i}\pi/3}\,e^{2\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{i}e^{4\pi/3} = \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$$

- Comme on ne doit effectuer que des produits, des quotients et des conjugaisons pour calculer z_4, la forme trigonométrique des facteurs composant ce complexe est adaptée au calcul. Il est donc judicieux d'écrire sous forme trigonométrique le seul facteur donné sous forme algébrique, d'effectuer le calcul puis de transformer l'écriture du résultat. Tout transformer dès le départ sous forme algébrique ne rendrait pas le calcul impossible à mener puisque l'on sait effectuer produits, quotients et conjugaison de complexes écrits sous cette forme, mais le nombre de réécriture serait le même que dans la solution préconisée et les opérations seraient plus longues à effectuer.

$$\begin{aligned} z_4 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) \times e^{-\mathrm{i}\pi/3} \times e^{-\mathrm{i}\pi/6} = 2\sqrt{2} \times e^{\mathrm{i}\pi/4} \times e^{-\mathrm{i}\pi/3} \times e^{-\mathrm{i}\pi/6} \\ &= 2\sqrt{2} \times \exp\left(\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\right) = 2\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\pi/4} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = 2 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

- Chaque facteur de z_5 est donné sous forme algébrique mais les ordres des puissances mises en jeu sont trop élevés pour faire un calcul raisonnable sous cette forme. On écrit donc les facteurs de z_5 sous forme trigonométrique avant d'effectuer les calculs puis de traduire le résultat sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z_5 &= (2\sqrt{2})^4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^4 2^5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^5 = 2^{11}\left(e^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^4\left(e^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)^5 = 2^{11}\,e^{\mathrm{i}\pi}e^{-5\mathrm{i}\pi/6} = 2^{11}\,e^{\mathrm{i}\pi/6} \\ &= 2^{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 1024\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) \end{aligned}$$

La forme algébrique exacte de z_5 est $1024\sqrt{3} + 1024\,\mathrm{i}$. Comme dans le calcul de z_2, on se permet de ne pas respecter tout à fait la définition d'écriture algébrique lorsque cela simplifie notablement l'écriture finale.

- Chaque facteur de z_6 est donné sous forme algébrique mais les ordres des puissances mises en jeu sont trop élevés pour faire un calcul raisonnable sous cette forme. D'un autre coté ces divers facteurs n'ont pas d'écriture trigonométrique connue. On utilise donc les propriétés des puissance pour regrouper les divers facteurs sous la forme d'une puissance de complexe, en espérant que ce complexe ait une forme trigonométrique simple.

$$\begin{aligned} z_6 &= (1-3\mathrm{i})\left(\frac{1-3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^6 = (1-3\mathrm{i})\left(\frac{(1-3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2^2+1^2}\right)^6 = (1-3\mathrm{i})\left(\frac{2-6\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{5}\right)^6 = (1-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^6 \\ &= (1-3\mathrm{i})\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right)^6 = (1-3\mathrm{i})\left(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6(1-3\mathrm{i})e^{-3\mathrm{i}\pi/2} = 8(1-3\mathrm{i})\mathrm{i} = 8(3+\mathrm{i}) \end{aligned}$$

La forme algébrique exacte de z_6 est $24 + 8\,\mathrm{i}$. Comme dans le calcul de z_2 ou z_5, on se permet de ne pas respecter tout à fait la définition d'écriture algébrique lorsque cela simplifie notablement l'énoncé. Dans ce cas, vue la taille de la partie réelle et de la partie imaginaire de z_6, cette licence est peut-être un peu abusive. Notez enfin que le passage par la forme trigonométrique est en fait inutile. Si vous avez repéré que $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$, vous aurez immédiatement calculé $(1-\mathrm{i})^6 = (-2\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$.

Correction de l'exercice 124

- Chaque complexe apparaissant dans l'écriture de z peut se mettre sous forme trigonométrique, le dénominateur de la fraction se gérant avec les formules (T7) et (T13). On effectue la transformation vers la forme trigonométrique de ces complexes avant de gérer les produits et les quotients afin de minimiser les calculs. On obtient ainsi

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) \times \frac{\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)}{\cos(-x) + \mathrm{i}\,\sin(-x)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times e^{\mathrm{i}\pi/6} \times \frac{e^{\mathrm{i}x}}{e^{-\mathrm{i}x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{\mathrm{i}(2x+\pi/6)}$$

Correction de l'exercice 125

- On note que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^8 = \left(z^2\right)^4$. En particulier

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8 &= \left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2\right)^4 \\ &= \left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4 \\ &= \left(2+\sqrt{2} - \left(2-\sqrt{2}\right) + 2\mathrm{i}\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)^4 = \left(2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^4 = (2\sqrt{2})^4(1+\mathrm{i})^4 = 64(1+\mathrm{i})^4 \end{aligned}$$

On peut alors soit écrire $1+\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique et achever le calcul, soit se souvenir que le carré de $1+\mathrm{i}$ est très simple et que la puissance d'ordre 4 de ce complexe n'est que le carré de son carré. Utilisons cette méthode pour conclure

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8=64\big((1+\mathrm{i})^2\big)^2=64(2\mathrm{i})^2=64\times(-4)=-256$$

Correction de l'exercice 126

L'objectif de cet exercice est de montrer, dans la deuxième question, une identité qui est une égalité. Avant de lire ce corrigé, vous pourrez relire le corrigé de l'exercice 31 qui expose et illustre la méthode pour aborder ce genre de preuve, et celui de l'exercice 44 qui présente deux autres exemples de cette méthode.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{C}^2$, $|x+y|^2=(x+y)\overline{(x+y)}=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})=x\overline{x}+x\overline{y}+y\overline{x}+y\overline{y}$.
2. Comme il est plus facile de développer que de factoriser, on développe le membre de droite de l'identité à prouver en utilisant le résultat de la première question. Soit alors $(x,y)\in\mathbb{C}^2$.

$$\begin{array}{ll} & |x+y|^2=x\overline{x}+x\overline{y}+y\overline{x}+y\overline{y} \\ \text{et} & |x-y|^2=x\overline{x}-x\overline{y}-y\overline{x}+y\overline{y} \\ \text{donc} & |x+y|^2-|x-y|^2=2\big(x\overline{y}+y\overline{x}\big) \\ \text{Or} & x\overline{y}+y\overline{x}\;=x\overline{y}+\overline{x\overline{y}}=2\mathrm{Re}\big(x\overline{y}\big) \\ \text{donc} & |x+y|^2-|x-y|^2=4\mathrm{Re}\big(x\overline{y}\big) \end{array}$$

Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Re}\big(x\overline{y}\big)=\dfrac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}$.

Correction de l'exercice 127

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p\leqslant q$. Dans tous les calculs qui suivent, la première manipulation consiste à réécrire la somme en l'indiçant par une partie de $\mathbb{N}$ formé d'entiers consécutifs commençant à 0. Pour ce faire, on utilise l'astuce présentée dans la leçon page 38. Ainsi, si $a_p,\dots,a_q$ sont des complexes,

$$\sum_{k=p}^{q}a_k=\sum_{k=0}^{q-p}a_{p+k}$$

- On note que $S_1=a\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}k+n\sum_{k=0}^{2n+1}1=\frac{a(2n+1)(2n+2)}{2}+n(2n+2)$.

  Il reste à mettre le résultat sous la forme demandée. On remarque que l'on peut factoriser par $n+1$. Le deuxième facteur est écrit sous la forme $An+B$ où A et B sont des constantes comme le stipule l'énoncé. On trouve ainsi

$$S_1=a(2n+1)(n+1)+2n(n+1)=(n+1)\big(a(2n+1)+2n\big)=(n+1)\big(2(a+1)n+a\big)$$

- Faites attention à l'absence de parenthèses sous la somme, indiquant que le terme n n'est pas «englobé» dans cette somme. On note alors que

$$S_2=a\sum_{k=0}^{n}(k+n)+n=a\left(\sum_{k=0}^{n}k+n\sum_{k=0}^{n}1\right)+n=a\left(\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)\right)+n$$

  Une factorisation immédiate conduit alors à $S_2=\dfrac{3an(n+1)}{2}+n=\dfrac{n(3an+3a+2)}{2}$.
- $S_3=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+m+1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}k+(m+1)\sum_{k=0}^{n-1}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+n(m+1)\right)=\frac{n(n+2m+1)}{4}$.
- Faites attention à la présence ou à l'absence de parenthèses sous une somme. Ainsi le terme 9 n'est pas «englobé» dans la première somme alors que le terme -1 est «englobé» dans la deuxième somme. Dans le calcul qui suit, on utilise aussi que la somme des entiers compris entre 0 et n est la même que celle des entiers compris entre 1 et n. On obtient ainsi

$$S_4=3\sum_{k=1}^{n}k-9+\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{n}1=4\sum_{k=1}^{n}k-9-(n+1)=2n(n+1)-10-n=2n^2+n-10$$

  Pour effectuer rapidement la factorisation, on peut noter que 2 est un point d'annulation de la fonction $x\mapsto 2x^2+x-10$ et exploiter la méthode travaillée dans l'exercice 13 et exploitée par exemple dans le deuxième exemple de l'exercice 61. On trouve ainsi

$$S_4=(2n+5)(n-2)$$

Correction de l'exercice 128

Soit p et q deux entiers naturels tels que $p \leqslant q$. Dans tous les calculs qui suivent, la première manipulation consiste à réécrire la somme en l'indiçant par une partie de $\mathbb{N}$ formé d'entiers consécutifs commençant à 0. Pour ce faire, on utilise l'astuce présentée dans la leçon page 38. Ainsi, si $a_p, \ldots, a_q$ sont des complexes,

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{p+k}$$

- On note que $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{7 \times x^{k+2}}{3 \times 2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{7x^2}{6} \times \frac{x^k}{2^k} \right) = \frac{7x^2}{6} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{2} \right)^k$.

  - Si $x = 2$ alors $\dfrac{x}{2} = 1$ donc $S_1 = \dfrac{7x^2}{6} \times n = \dfrac{14n}{3}$.
  - Si $x \neq 2$ alors $\dfrac{x}{2} \neq 1$ donc $S_1 = \dfrac{7x^2}{6} \times \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n - 1}{\frac{x}{2} - 1}$, que l'on peut écrire plus simplement $S_1 = \dfrac{7x^2}{3(x-2)} \left(\left(\dfrac{x}{2} \right)^n - 1 \right)$.

- $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{y^{2n}} \right)^k$.

  - Si $|y| = 1$ alors $\dfrac{1}{y^{2n}} = 1$ donc $S_2 = n + 1$.
  - Si Si $|y| \neq 1$ alors $\dfrac{1}{y^{2n}} \neq 1$ donc $S_2 = \dfrac{\left(\frac{1}{y^{2n}}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{y^{2n}} - 1}$, que l'on peut écrire plus simplement $S_2 = \dfrac{1 - y^{2n(n+1)}}{y^{(2n^2)}\left(1 - y^{2n}\right)}$.

- $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} x^{k+1} y^{k+2} z^{k+3} = xy^2z^3 \sum_{k=0}^{2n-1} (xyz)^k$.

  - Si $xyz = 1$, $S_3 = 2nxy^2z^3$, que l'on peut écrire plus simplement $S_3 = 2n(xyz)yz^2 = 2nyz^2$.
  - Si $xyz \neq 1$, $S_3 = \dfrac{xy^2z^3\left((xyz)^{2n} - 1\right)}{xyz - 1}$.

- $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x^{k+n} + y^{k+n} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(x^n x^k + y^n y^k \right) = x^n \sum_{k=0}^{n} x^k + y^n \sum_{k=0}^{n} y^k$.

  On doit a présent distinguer des cas pour chaque somme. La première somme se calcule de manière particulière si et seulement si $x = 1$. La deuxième somme se calcule de manière particulière si et seulement si $y = 1$. On distingue donc quatre cas.

  - Si $x = 1$ et $y = 1$, $S_4 = (n+1)x^n + (n+1)y^n = 2(n+1)$.
  - Si $x = 1$ et $y \neq 1$, $S_4 = (n+1)x^n + y^n \times \dfrac{y^{n+1} - 1}{y - 1} = n + 1 + \dfrac{y^n\left(y^{n+1} - 1\right)}{y - 1}$.
  - Si $x \neq 1$ et $y = 1$, $S_4 = x^n \times \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + (n+1)y^n = \dfrac{x^n\left(x^{n+1} - 1\right)}{x - 1} + n + 1$.
  - Si $x \neq 1$ et $y \neq 1$, $S_4 = \dfrac{y^n\left(y^{n+1} - 1\right)}{y - 1} + \dfrac{x^n\left(x^{n+1} - 1\right)}{x - 1}$.

- $S_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((x^k)^2 + 2x^k y^k + (y^k)^2 \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(x^{2k} + 2(xy)^k + y^{2k} \right) = \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k + 2\sum_{k=0}^{n} (xy)^k + \sum_{k=0}^{n} (y^2)^k$.

  On doit a présent distinguer des cas pour chaque somme. La première somme se calcule de manière particulière si et seulement si $|x| = 1$. La deuxième somme se calcule de manière particulière si et seulement si $xy = 1$. La dernière somme se calcule de manière particulière si et seulement si $|y| = 1$. Une des difficultés de la discussion est que les trois contraintes à imposer ne sont pas indépendantes. On note que si $|x| = 1$ et $|y| = 1$, on est sûr que $|xy| = 1$ donc que $xy = 1$ ou $xy = -1$; ceci nous fournit nos deux premier cas. Si une des valeurs absolues entre $|x|$ et $|y|$ vaut 1 et l'autre ne vaut pas 1, on est sûr que $xy \neq 1$; cela nous donne deux nouveau cas. Enfin, il reste à traiter le cas où les réels $|x|$ et $|y|$ sont différents de 1; dans ce cas, xy a une valeur quelconque donc on obtient deux nouveau cas suivant que xy vaut 1 ou pas.

Plus précisément,

- Si $|x|=1$, $|y|=1$ et $xy>0$ alors $xy=1$ donc $S_5=4(n+1)$.
- Si $|x|=1$, $|y|=1$ et $xy<0$ alors $xy=-1$ donc $S_5=(n+1)+2\times\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}+(n+1)=2n+3+(-1)^n$.
- Si $|x|=1$ et $|y|\neq 1$ alors $xy\neq 1$ donc $S_5=n+1+\dfrac{2\big((xy)^{n+1}-1\big)}{xy-1}+\dfrac{y^{2(n+1)}-1}{y^2-1}$.
- Si $|x|\neq 1$ et $|y|=1$ alors $xy\neq 1$ donc $S_5=\dfrac{x^{2(n+1)}-1}{x^2-1}+\dfrac{2\big((xy)^{n+1}-1\big)}{xy-1}+n+1$.
- Si $|x|\neq 1$, $|x|\neq 1$ et $xy=1$ alors $S_5=\dfrac{x^{2(n+1)}-1}{x^2-1}+2(n+1)+\dfrac{y^{2(n+1)}-1}{y^2-1}$.
- Si $|x|\neq 1$, $|y|\neq 1$ et $xy\neq 1$ alors $S_5=\dfrac{x^{2(n+1)}-1}{x^2-1}+\dfrac{2\big((xy)^{n+1}-1\big)}{xy-1}+\dfrac{y^{2(n+1)}-1}{y^2-1}$

- $S_6=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x}{y^{n+1+k}}\right)^3=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^3}{y^{3(n+1+k)}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^3}{y^{3(n+1)}(y^3)^k}=\frac{x^3}{y^{3(n+1)}}\times\sum_{k=0}^{n-1}(y^{-3})^k$.

  - Si $y=1$, $S_6=\dfrac{x^3}{y^{3(n+1)}}\times n=nx^3$.
  - Si $y\neq 1$, $S_6=\dfrac{x^3}{y^{3(n+1)}}\times\dfrac{(y^{-3})^n-1}{y^{-3}-1}$.

  Si on veut chasser les puissance d'ordre négatif, on peut réécrire cette expression sous la forme $S_6=\dfrac{x^3(1-y^{3n})}{y^{6n}(1-y^3)}$.

- $S_7=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{(2k+3)x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{(2k+3)nx}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2nxk}\times\mathrm{e}^{3nx}\right)=\mathrm{e}^{3nx}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{2nx}\right)^k$.

On sait que l'exponentielle d'un réel vaut 1 si et seulement si ce réel est nul. On distingue donc deux cas pour achever le calcul.

  - Si $x=0$ alors $\mathrm{e}^{2nx}=1$ donc $S_7=\mathrm{e}^{3nx}\times n=n$.
  - Si $x\neq 0$ alors $\mathrm{e}^{2nx}\neq 1$ donc $S_7=\mathrm{e}^{3nx}\times\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2nx}\right)^n-1}{\mathrm{e}^{2nx}-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{3nx}\left(\mathrm{e}^{2n^2x}-1\right)}{\mathrm{e}^{2nx}-1}$.

- $S_8=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^2(x^3)^k}{2y^k}+\frac{1}{2y^k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^2}{2}\left(\frac{x^3}{y}\right)^k+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\right)^k\right)=\frac{x^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^3}{y}\right)^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{y}\right)^k$.

On doit a présent distinguer des cas pour chaque somme. La première somme se calcule de manière particulière si et seulement si $x^3=y$. La deuxième somme se calcule de manière particulière si et seulement si $y=1$. Une des difficultés de la discussion est que les contraintes à imposer ne sont pas indépendantes. On note que si $y=1$, on sait calculer la deuxième somme et on peut distinguer deux cas pour x pour calculer la première somme. Il en est de même si $y\neq 1$. Dans chacun des calculs qui suit, on chasse les «fractions étagées»; le calcul est détaillé les deux premières fois et le résultat est juste donné dans le dernier cas, les calculs étant les mêmes. Plus précisément,

  - Si $y=1$ et $x=1$ alors $\dfrac{x^3}{y}=1$ et $\dfrac{1}{y}=1$ donc $S_8=\dfrac{x^2}{2}\times(n+1)+\dfrac{1}{2}\times(n+1)=n+1$.
  - Si $y=1$ et $x\neq 1$ alors $\dfrac{x^3}{y}\neq 1$ et $\dfrac{1}{y}=1$ donc $S_8=\dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{\left(\dfrac{x^3}{y}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{x^3}{y}-1}+\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{x^2\left(x^{3(n+1)}-1\right)}{2(x^3-1)}+\dfrac{n+1}{2}$.
  - Si $y\neq 1$ et $y=x^3$ alors $\dfrac{x^3}{y}=1$ et $\dfrac{1}{y}\neq 1$ donc $S_8=\dfrac{x^2}{2}\times(n+1)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\left(\dfrac{1}{y}\right)^{n+1}-1}{\dfrac{1}{y}-1}=\dfrac{(n+1)x^2}{2}+\dfrac{1-y^{n+1}}{2y^n(1-y)}$.
  - Si $y\neq 1$ et $y\neq x^3$ alors $\dfrac{x^3}{y}\neq 1$ et $\dfrac{1}{y}\neq 1$ donc $S_8=\dfrac{x^2\left(x^{3(n+1)}-y^{n+1}\right)}{2y^n\left(x^3-y\right)}+\dfrac{1-y^{n+1}}{2y^n(1-y)}$.

- La propriété (LN1) de la fonction logarithme permet directement de ramener la somme demandée à celle de termes consécutifs d'une suite arithmétique. Il n'y a donc aucune discussion à mener puisqu'on utilise la formule (S4) de la leçon sur les sommes.

$$S_9=\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(3)+k\ln(y)\big)=\sum_{k=1}^{n}\ln(3)+\ln(y)\sum_{k=1}^{n}k=n\ln(3)+\frac{n(n+1)\ln(y)}{2}$$

• On note que

$$\begin{aligned}S_{10} &= \sum_{k=0}^{2n} 3(x^{k-n}+k-n) = 3\left(x^{-n}\sum_{k=0}^{2n} x^k + \sum_{k=0}^{2n} k - n\sum_{k=0}^{2n} 1\right)\\ &= 3\left(x^{-n}\sum_{k=0}^{2n} x^k + \frac{2n(2n+1)}{2} - n(2n+1)\right) = \frac{3}{x^n}\sum_{k=0}^{2n} x^k\end{aligned}$$

On aurait pu éviter le calcul de la somme lié au deuxième terme de l'expression initiale. En effet la somme de tous les entiers relatifs entre $-n$ et n est clairement nulle. Ceci étant, on peut achever le calcul en distinguant deux cas.

- Si $x = 1$ alors $S_{10} = \dfrac{3(2n+1)}{x^n} = 3(2n+1)$
- Si $x \neq 1$ alors $S_{10} = \dfrac{3\big(x^{2n+1}-1\big)}{x^n(x-1)}$

Correction de l'exercice 129

1 • On a vérifié dans la leçon page 38 que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(a_k - a_{k-1}\big) = a_n - a_0$

2 • Pour tout entier naturel non nul k, on note que $2^k - 2^{k-1} = 2\times 2^{k-1} - 2^{k-1} = 2^{k-1}$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\big(2^k - 2^{k-1}\big) = 2^n - 2^0 = 2^n - 1$$

3 • La formule (LN2) sur le logarithme assure que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1)$.

Correction de l'exercice 130

Chaque calcul de dérivée est en premier lieu présenté sans transformation préalable de la fonction à dériver. On présente ensuite, lorsque c'est possible, un calcul plus efficace lié à une réécriture de la fonction à dériver, en suivant les idées du dernier paragraphe du cours. Pour dériver une fonction, il faut reconnaître dans l'expression de cette fonction un des modèles du cours présenté dans les points (D1) à (D5). Les modèles (D1) à (D4) sont classés par ordre de «pénibilité» croissante pour effectuer les calculs. C'est pourquoi, dériver $x \mapsto x + \sin(x)$, qui relève du modèle (D1), est plus simple que dériver $x \mapsto x\sin(x)$, qui relève du modèle (D3), lui-même plus simple que dériver $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, qui relève du modèle (D4). Le cas de (D5) est un peu particulier. Il est délicat à repérer et à utiliser **sauf** lorsque u est une fonction affine (avec les notations de la leçon). En effet, si a et b sont deux réels et si f est une fonction, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$. En tout état de cause, simplifier l'expression d'une fonction avant de la dériver consiste à la transformer de telle sorte que sa dérivation fasse appel à un modèle plus simple que celui nécessaire pour gérer l'écriture initiale.

1 • La première fonction proposée est le produit de $a : x \mapsto 3x^2+1$ et de $b : x \mapsto \cos(2x)$. Cette deuxième fonction se dérive en utilisant le modèle (D5) avec la fonction u égale à $x \mapsto 2x$ et la fonction f qui est la fonction cosinus. On sait donc que

$$\begin{array}{ll} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ b'(x) = -2\sin(2x)\\ \text{donc} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 3\times 2x \times b(x) + (3x^2+1)b'(x)\\ \text{donc} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = 6x\cos(2x) - 2(3x^2+1)\sin(2x)\end{array}$$

Changer la forme du résultat obtenu est inutile. Comme toujours, tant que l'on ne sait pas à quoi sert le résultat d'un calcul, en trouver une forme optimale est une quête vaine.

2 • La deuxième fonction proposée relève du modèle (D4). Un calcul direct conduit à: pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$,

$$f_2'(x) = \frac{2\times(x+3)-(2x-1)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$$

On peut aussi transformer a priori l'écriture de l'expression de la fonction f_2 en utilisant la technique classique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47. On sait ainsi que pour pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$,

$$f_2(x) = \frac{2(x+3)-7}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$$

Sous cette forme, le calcul de f_2' est immédiat... et redonne directement l'expression déjà trouvée.

3. Si on ne transforme pas l'écriture de l'expression de f_3, on peut visualiser cette fonction comme un produit et utiliser la formule (D3), ou utiliser le modèle (D5) en utilisant la fonction $x \mapsto x^2$ comme fonction f et la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ comme fonction u. Pour les deux calculs, on a besoin de dériver la fonction $u : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ qui est un produit. On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = x \times \mathrm{e}^x + 1 \times \mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$$

Si on exploite à présent l'idée d'écrire f_3 sous la forme $u \times u$ pour utiliser la formule (D3), on note que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3'(x) = u'(x) \times u(x) + u(x) \times u'(x) = 2u(x)u'(x) = 2x\mathrm{e}^x \times (x+1)\mathrm{e}^x = 2x(x+1)\big(\mathrm{e}^x\big)^2$$

Dériver f_3 à l'aide de la formule (D5) est un peu plus efficace puisque l'on obtient directement la deuxième expression de la fonction f_3'. Ceci étant, il est bien plus efficace de faire partiellement disparaître le carré dans l'expression de f_3 avant de dériver en utilisant la formule (ER1) pour écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$. On calcule alors en une seule ligne: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_3'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{2x} + x^2 \times 2\mathrm{e}^{2x} = 2(x^2+x)\mathrm{e}^{2x}$$

4. La fonction f_4 est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. La formule (D4) assure que pour tout $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$,

$$f_4'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$$

en utilisant la première formule de trigonométrie.

5. La fonction f_5 est le quotient de la fonction $a : x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ et de la fonction $b : x \mapsto x+1$, que l'on dérive en utilisant la formule (D4). La fonction a est elle-même le produit de deux fonctions, à savoir $c : x \mapsto x$ et $d : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$; autrement dit, a se dérive à l'aide de la formule (D3). Enfin, on dérive d en utilisant la formule (D5). Mettons tout ceci en pratique.

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ d'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\\
\text{donc}\quad &\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ a'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\mathrm{e}^{2x} = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}\\
\text{donc}\quad &\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f_5'(x) = \frac{(2x+1)\mathrm{e}^{2x} \times (x+1) - x\mathrm{e}^{2x} \times 1}{(x+1)^2} = \frac{(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{2x}}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

6. La fonction f_6 relève du modèle (D5) en utilisant les fonctions $u : x \mapsto x^2+x+1$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On calcule alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_6'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

7. La fonction f_7 est le produit de $x \mapsto x$ et de $a : x \mapsto \ln\big(\sqrt{x}\big)$, cette dernière relevant du modèle (D5) en utilisant les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f : x \mapsto \ln(x)$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ a'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\big(\sqrt{x}\big)^2} = \frac{1}{2x}\\
\text{donc}\quad &\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_7'(x) = 1 \times \ln\big(\sqrt{x}\big) + x \times \frac{1}{2x} = \ln\big(\sqrt{x}\big) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La complexité du calcul précédent est lié à l'écriture très maladroite de l'expression de f_7. En effet, la formule (LN3) assure que

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_7(x) = \frac{1}{2}\,x\ln(x)\\
\text{donc}\quad &\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_7'(x) = \frac{1}{2}\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)+1}{2}
\end{aligned}$$

8. La fonction f_8 est l'inverse de la fonction $a : x \mapsto (2x+1)^4$ qui est la puissance d'ordre 4 de la fonction $x \mapsto 2x+1$ qui se dérive en utilisant la formule (D5). On note donc que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$,

$$f_8'(x) = -\frac{a'(x)}{\big(a(x)\big)^2} = -\frac{4 \times 2 \times (2x+1)^{4-1}}{\big((2x+1)^4\big)^2} = -\frac{8(2x+1)^3}{(2x+1)^8} = -\frac{8}{(2x+1)^5}$$

Ceci étant, ce calcul brutal est très maladroit et conduit à de lourdes manipulations de puissances. Il aurait été préférable de noter que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$, $f_8(x) = (2x+1)^{-4}$, qui se dérive directement en utilisant la formule (D5). Il est impératif de se souvenir que l'inverse d'une puissance est aussi une puissance. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$,

$$f_8'(x) = -4 \times 2 \times (2x+1)^{-4-1} = -\frac{8}{(2x+1)^5}$$

9. La fonction f_9 est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. La formule (D4) assure que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f_9'(x) = \frac{\ln'(x) \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

10. La fonction f_{10} est l'inverse d'une fonction dont on peut calculer la dérivée à l'aide de la formule (D5) en utilisant pour fonction u la fonction $x \mapsto 2x$ et pour fonction f la fonction sinus. Ainsi pour tout $x \in \left]0\,;\pi\right[$,

$$f_{10}'(x) = -\frac{2\cos(2x)}{2\big(\sin(2x)\big)^2} = -\frac{\cos(2x)}{\big(\sin(2x)\big)^2}$$

11. La fonction f_{11} est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. La formule (D4) assure que pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$,

$$f_{11}'(x) = \frac{2 \times (1-x^2) - (1+2x) \times (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(x^2+x+1)}{(1-x^2)^2}$$

12. On peut dériver directement la fonction f_{12} en exploitant la formule (D5) avec la fonction $u : x \mapsto x/(x+1)$ et la fonction logarithme. La fonction u est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. La formule (D4) assure que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$u'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f_{12}'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

On peut optimiser un peu ce calcul en transformant l'écriture de l'expression de la fonction u. La technique classique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, permet en effet d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$u(x) = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Sous cette forme, le calcul de u' est immédiat... et redonne directement l'expression déjà trouvée. Ceci étant, les deux versions du calcul sont très maladroites puisque la propriété (LN2) assure que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_{12}(x) = \ln(x) - \ln(x+1)$. Sous cette forme, on dérive f_{12} directement et on trouve une forme un peu différente de f_{12}'. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f_{12}'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

13. La fonction f_{13} est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. La formule (D4) assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{13}'(x) = \frac{2 \times (x^2+1) - 2x \times (2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

14. La fonction f_{14} relève du modèle (D5) en utilisant les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ et $f : x \mapsto \sin(x)$. On note alors que l'on peut aussi utiliser la formule (D5) pour dériver u. On en déduit que

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } x \in \left]-1/2\,;+\infty\right[,\ u'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ \text{donc}\quad &\text{pour tout } x \in \left]-1/2\,;+\infty\right[,\ f_{14}'(x) = u'(x) \times \cos\big(u(x)\big) = \frac{\cos\big(\sqrt{2x+1}\big)}{\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

15. La fonction f_{15} relève du modèle (D5) en utilisant les fonctions $u : x \mapsto (x+1)/x$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Si on ne transforme pas l'écriture de u, on peut dériver cette fonction comme quotient de deux fonctions dont la dérivée est connue. On note ainsi que

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ u'(x) = \frac{1 \times x - (x+1) \times 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \\ \text{donc}\quad &\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_{15}'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2} \times \sqrt{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x(x+1)}} \end{aligned}$$

en notant que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x^2 = x\big(\sqrt{x}\big)^2$. Notez que l'on peut optimiser le calcul de la dérivée de u en notant que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u(x) = 1 + 1/x$, ce qui permet de retrouver directement l'expression de u'.

16. La fonction f_{16} est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. La formule (D4) assure que pour tout $x \in]-\pi\,;\pi[$,

$$f_{16}'(x) = \frac{3\cos(x) \times \big(\cos(x)+1\big) - 3\sin(x) \times \big(-\sin(x)\big)}{\big(\cos(x)+1\big)^2} = \frac{3\big(\cos(x)\big)^2 + 3\cos(x) + 3\big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)+1\big)^2}$$

On utilise alors la première formule de trigonométrie, ce qui permet de simplifier drastiquement le numérateur de l'expression de f_{16}' en regroupant le premier terme et le troisième terme de cette expression, puis de simplifier la fraction encore une fois. En effet pour tout $x \in]-\pi\,;\pi[$,

$$f_{16}'(x) = \frac{3\cos(x)+3}{\big(\cos(x)+1\big)^2} = \frac{3}{\cos(x)+1}$$

17. Si on ne transforme pas l'écriture de f_{17}, cette fonction apparaît comme le quotient de la fonction $a : x \mapsto \big(\sin(x)\big)^2$ et de la fonction $b : x \mapsto \big(\cos(x)\big)^2$. Chacune des deux fonctions a et b est un carré que l'on dérive soit comme un produit, soit à l'aide de la formule (D5). On a vu dans l'étude de la fonction f_3 que la deuxième méthode est un peu plus efficace. On note ainsi que

pour tout $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$, $a'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

et pour tout $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$, $b'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$

donc pour tout $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$,
$$\begin{aligned} f_{17}'(x) &= \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{\big(b(x)\big)^2} = \frac{2\sin(x)\cos(x)\big(\cos(x)\big)^2 + 2\sin(x)\cos(x)\big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^4} \\ &= \frac{2\sin(x)\cos(x)\Big(\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2\Big)}{\big(\cos(x)\big)^4} \\ &= \frac{2\sin(x)}{\big(\cos(x)\big)^3} \end{aligned}$$

en exploitant la première formule de trigonométrie puis en effectuant une simplification dans la fraction apparaissant. On peut optimiser le calcul de plusieurs manières. D'une part, les formules de trigonométrie (T19) et (T20) assurent que pour tout $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$,

$$a(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Ces expressions permettent de déterminer les expressions de a' et de b' plus efficacement. En revanche, si on les utilise, la simplification finale est bien moins visible; faites le calcul pour vous en assurer. De toute manière, on obtient un calcul encore plus efficace en notant que la fonction f_{17} est le carrée de la fonction f_4. Le calcul de l'expression de f_4' est assez élémentaire et l'usage de (D5) permet d'écrire que pour tout $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$,

$$f_{17}'(x) = 2 \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{2\sin(x)}{\big(\cos(x)\big)^3}$$

18. La fonction f_{18} relève du modèle (D5) en utilisant les fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. On note alors que l'on peut aussi utiliser la formule (D5) pour dériver u qui est la racine carrée de $x \mapsto x^2+1$. On en déduit que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{18}'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

Correction de l'exercice 131

1. Comme une primitive de $x \mapsto x^3$ est connue, la fonction f_1 relève du modèle (PR3). On sait donc qu'une primitive de la fonction f_1 est

$$x \mapsto \frac{(2x+1)^4}{8}$$

On peut aussi noter que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2x+1$ est $x \mapsto 2$. La fonction f_1 est donc égale à $\dfrac{1}{2}\,u'u^3$. En utilisant les formules (PR2) et (PR7), on retrouve le résultat déjà énoncé.

2. Comme une primitive de la fonction cosinus est connue, il en est de même d'une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)/2$. La fonction f_2 relève donc du modèle (PR3) et on sait qu'une primitive de la fonction f_1 est

$$x \mapsto \frac{\sin(3x-1)}{6}$$

Comme dans le cas de la première fonction, on peut aussi noter que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 3x-1$ est $x \mapsto 3$. La fonction f_2 est donc égale à $\dfrac{1}{6}\,u'\cos(u)$. En utilisant les formules (PR2) et (PR5), on retrouve le résultat déjà énoncé.

3 • Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est connue, la fonction f_3 relève du modèle (PR3). On sait donc qu'une primitive de la fonction f_4 est

$$x \mapsto -\frac{\ln\big(|1-4x|\big)}{4}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto -\frac{\ln\big(4x-1\big)}{4}$$

vu le domaine de travail. Comme dans le cas de la première fonction, on peut aussi noter que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 1-4x$ est $x \mapsto -4$. La fonction f_3 est donc égale à $-\dfrac{u'}{4u}$. En utilisant les formules (PR2) et (PR8), on retrouve le résultat déjà énoncé. Noter pour conclure que la gestion des signes est sans doute plus simple en calculant une primitive de $-f_4$, dont on écrit l'expression sous la forme $x \mapsto \dfrac{1}{4x-1}$.

4 • Ne pas oublier d'écrire la fonction f_4 sous forme d'une puissance, c'est à dire $x \mapsto \dfrac{x^{-3}}{2}$. L'usage de la formule (PR2) assure alors directement qu'une primitive de f_4 est

$$x \mapsto \frac{x^{-2}}{-2\times 2}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto -\frac{1}{4x^2}$$

5 • Si on écrit f_5 sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ en utilisant le résultat (ER1), cette fonction relève directement du modèle (PR3) qui assure qu'une primitive de f_5 est

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$$

6 • On note que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 1-x^3$ est $x \mapsto -3x^2$. La fonction f_6 est donc égale à $-\dfrac{2u'}{3u}$. Les formules (PR2) et (PR8) assurent donc qu'une primitive de f_6 est

$$x \mapsto -\frac{2\ln\big(|1-x^3|\big)}{3}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto -\frac{2\ln\big(x^3-1\big)}{3}$$

vu le domaine de travail. Noter pour conclure que la gestion des signes est sans doute plus simple en calculant une primitive de $-f_6$, dont on écrit l'expression sous la forme $x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^3-1}$.

7 • Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est connue, la fonction f_7 relève du modèle (PR3). On sait donc qu'une primitive de la fonction f_7 est

$$x \mapsto \frac{\sqrt{2x-4}}{3}$$

On peut aussi noter que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2x-4$ est $x \mapsto 2$. La fonction f_7 est donc égale à $\dfrac{u'}{6\sqrt{u}}$. En utilisant les formules (PR2) et (PR9), on retrouve le résultat déjà énoncé.

8 • On note que f_8 est la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{2x}$. Comme la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, la fonction f_8 est donc égale à $\dfrac{1}{2}\,u'u$. Les formules (PR2) et (PR7) assurent alors qu'une primitive de la fonction f_8 est

$$x \mapsto \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{4}$$

9 • La technique classique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, permet d'écrire pour tout $x \in \left]-1/3\,;+\infty\right[$,

$$\frac{x}{3x+1} = \frac{\frac{1}{3}(3x+1) - \frac{1}{3}}{3x+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3x+1)}$$

Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est connue, le deuxième terme de la fonction f_9 relève du modèle (PR3). On sait donc qu'une primitive de la fonction f_9 est

$$x \mapsto \frac{x}{3} - \frac{\ln\big(|3x+1|\big)}{9}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto \frac{x}{3} - \frac{\ln(3x+1)}{9}$$

vu le domaine de travail. Comme dans le cas de la première fonction, on peut gérer le premier terme de la fonction f_8 en notant que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 3x+1$ est $x \mapsto 3$. La deuxième terme de la fonction f_8 est donc égal à $\dfrac{u'}{9u}$. En utilisant les formules (PR2) et (PR8), on retrouve le résultat déjà énoncé.

10 • Ne pas oublier d'écrire la fonction f_{10} en utilisant une fonction puissance, c'est à dire $x \mapsto 4x(x^2+1)^{-3}$. On note alors que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est $x \mapsto 2x$. Autrement dit la fonction f_{10} est égale à $2u'u^{-3}$. Les formules (PR2) et (PR7) assurent alors qu'une primitive de f_{10}

$$x \mapsto \frac{2(x^2+1)^{-2}}{-2}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto -\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

11 • Comme la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, la fonction f_{11} est donc égale à $u'u^2$. Les formules (PR2) et (PR7) assurent alors qu'une primitive de la fonction f_{11} est

$$x \mapsto \frac{\big(\ln(x)\big)^3}{3}$$

12 • En utilisant la formule (ER1), On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{12}(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1$. La formule (PR3) permet de calculer directement une primitive du premier terme de l'expression de f_{12}. Les autres termes sont des fonctions de base. La formule (PR1) assure alors qu'une primitive de la fonction f_{12} est

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \mathrm{e}^x + x$$

13 • On note que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La fonction f_{13} est donc égale à $2u'\cos(u)$. La formule (PR5) assure donc qu'une primitive de f_{13} est

$$x \mapsto 2\sin\left(\sqrt{x}\right)$$

14 • Ne pas oublier d'écrire la fonction f_{14} en utilisant une fonction puissance, c'est à dire $x \mapsto (2x+3)^{-2}$. On note alors que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2x+3$ est $x \mapsto 2$. Autrement dit la fonction f_{14} est égale à $\dfrac{1}{2}\,u'u^{-2}$. Les formules (PR2) et (PR7) assurent alors qu'une primitive de f_{14}

$$x \mapsto \frac{(2x+3)^{-1}}{-1 \times 2}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto -\frac{1}{2(2x+3)}$$

15 • On note que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2\mathrm{e}^x + 1$ est $x \mapsto 2\mathrm{e}^x$. La fonction f_{15} est donc égale à $\dfrac{2u'}{u}$. Les formules (PR2) et (PR8) assurent donc qu'une primitive de f_{15} est

$$x \mapsto 2\ln\left(|2\mathrm{e}^x + 1|\right), \quad \text{soit} \quad x \mapsto 2\ln\left(2\mathrm{e}^x + 1\right)$$

vu le domaine de travail.

16 • La technique classique introduite dans l'exercice 3 et surtout 11, et encore mise en œuvre dans l'exercice 47, permet d'écrire pour tout $x \in \left]-2/3\,;+\infty\right[$,

$$\frac{2x+3}{3x+2} = \frac{\frac{2}{3}(3x+2) + \frac{5}{3}}{3x+2} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3(3x+2)}$$

Comme une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est connue, le deuxième terme de la fonction f_{16} relève du modèle (PR3). On sait donc qu'une primitive de la fonction f_{16} est

$$x \mapsto \frac{2x}{3} - \frac{5\ln\left(|3x+2|\right)}{9}, \quad \text{soit} \quad x \mapsto \frac{2x}{3} - \frac{5\ln(3x+2)}{9}$$

vu le domaine de travail. Comme dans le cas de la première fonction, on peut gérer le deuxième terme de la fonction f_{16} en notant que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 3x+2$ est $x \mapsto 3$. La deuxième terme de la fonction f_{16} est donc égal à $\dfrac{5u'}{9u}$. En utilisant les formules (PR2) et (PR8), on retrouve le résultat déjà énoncé.

17 • On note que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 3x^2$ est $x \mapsto 6x$. La fonction f_{17} est donc égale à $\dfrac{1}{6}\,u'\mathrm{e}^u$. Les formules (PR2) et (PR4) assurent donc qu'une primitive de f_{17} est

$$x \mapsto \frac{\exp\left(3x^2\right)}{6}$$

18 • On peut gérer la fonction f_{18} comme on a géré la fonction f_{12}, en développant. On peut même effectuer le développement de manière efficace en utilisant l'astuce décrite dans l'exercice 8 puis la formule (P3) sur les puissances et la formule (ER1) sur les exponentielles. On note ainsi que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{18}(x) &= \mathrm{e}^x\big((2\mathrm{e}^x)^4 + 4\times(2\mathrm{e}^x)^3 + 6\times(2\mathrm{e}^x)^2 + 4\times(2\mathrm{e}^x) + 1\big) \\ &= \mathrm{e}^x\big(2^4\times(\mathrm{e}^x)^4 + 4\times 2^3\times(\mathrm{e}^x)^3 + 6\times 2^2\times(\mathrm{e}^x)^2 + 4\times 2\times \mathrm{e}^x + 1\big) \\ &= \mathrm{e}^x\big(16\mathrm{e}^{4x} + 32\mathrm{e}^{3x} + 24\mathrm{e}^{2x} + 8\mathrm{e}^x + 1\big) \\ &= 16\mathrm{e}^{5x} + 32\mathrm{e}^{4x} + 24\mathrm{e}^{3x} + 8\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

La formule (PR3) permet de calculer directement une primitive des quatre premiers termes de l'expression de f_{18}. Le dernier terme est une fonction de base. La formule (PR1) assure alors qu'une primitive de la fonction f_{18} est

$$x \mapsto \frac{16\mathrm{e}^{5x}}{5} + 8\mathrm{e}^{4x} + 8\mathrm{e}^{3x} + 4\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x$$

On peut en fait être beaucoup plus efficace en notant que la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2\mathrm{e}^x + 1$ est $x \mapsto 2\mathrm{e}^x$. La fonction f_{18} est donc égale à $\dfrac{1}{2}u'u^4$. Les formules (PR2) et (PR7) assurent donc qu'une primitive de f_{18} est

$$x \mapsto \frac{\big(2\mathrm{e}^x + 1\big)^5}{10}$$

Les plus courageux pourront développer cette expression. Ils ne retrouveront pas exactement la première primitive déterminée. En effet les deux primitives diffèrent d'une constante, à savoir $\dfrac{1}{10}$.

19 • En utilisant la formule (T19) de trigonométrie, on note que pour tout $x \in \,]0\,;\pi/2[$, $f_{19}(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$. Or la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto 2\cos(2x)$. La fonction f_{19} est donc égale à $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Les formules (PR2) et (PR9) assurent donc qu'une primitive de f_{19} est

$$x \mapsto \sqrt{\sin(2x)}$$

20 • On utilise la technique introduite dans la troisième question de l'exercice 11 et développée dans l'exercice 47. Soit $x \in \,]-1\,;1[$. Comme le dénominateur de l'expression $f_{20}(x)$ est $(x+1)(x-1)$, on cherche trois réels, notés tous trois ? alors qu'ils sont a priori distincts, tels que $?(x+1) + ?(x-1) = ?$. Comme on ne veut pas de x dans le membre de droite de notre identité, les deux premiers réels doivent être opposés l'un de l'autre. On remarque ainsi que

$$\begin{aligned} & (x+1) - (x-1) = 2 \\ \text{donc} \quad & \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} \\ \text{donc} \quad & \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \end{aligned}$$

Comme on connaît une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, chaque terme de l'expression de f_{20} se calcule avec la formule (PR3). Une primitive de cette fonction est donc

$$x \mapsto 2\ln\big(|x-1|\big) - 2\ln\big(|x+1|\big) \quad \text{soit} \quad x \mapsto 2\ln(1-x) - 2\ln(x+1)$$

vu le domaine de travail. Notez que l'on peut regrouper les deux logarithmes formant l'expression de notre primitive si besoin est en utilisant la formule (LN2).

21 • La formule (T20) de trigonométrie assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big(\sin(x)\big)^2 = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ relève du modèle (PR3). L'usage de cette formule et de la formule (PR1) permet alors le calcul de la primitive de f_{21} qui est

$$x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

Correction de l'exercice 132

1 • La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est un produit de fonctions dont on connaît la dérivée. Le cours assure que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = 1\times\sqrt{x} + x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Autrement dit, une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ est f. La formule (PR1) assure donc qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$.

2 • La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ est un produit de fonctions dont on connaît la dérivée. Le cours assure alors que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) = f'(x) - 1$

Si on appelle g une primitive de la fonction $x \mapsto 1$, on sait donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) = (f-g)'(x)$. Autrement dit, une primitive de la fonction logarithme est $f - g$. Or le calcul d'une fonction g convenable est immédiat. On en déduit directement qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. Le cours assure alors

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$\text{donc}\quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} - f'(x)$$

Si on appelle g une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, on sait donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = (g-f)'(x)$. Autrement dit, une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est $g - f$. Or le calcul d'une fonction g convenable est immédiat. On en déduit directement qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{\ln(x)+1}{x}$.

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. Le cours assure alors que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - (x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{donc}\quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{x^2+1} - f'(x)$$

Notons g une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$. On note que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2+1$ est $x \mapsto 2x$. La fonction g est donc de la forme $\dfrac{u'}{u}$. La formule et (PR8) assure donc qu'une primitive de g est $x \mapsto \ln\left(|x^2+1|\right)$, soit $x \mapsto \ln(x^2+1)$ vu le domaine de travail. L'identité précédente assure qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ est l'opposé de $f+g$ c'est à dire est la fonction $x \mapsto -\dfrac{x+1}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

5. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est un quotient de fonctions dont on connaît la dérivée. Le cours assure alors

$$\text{pour tout } x \in \,]0\,;\pi[,\ f'(x) = \frac{-\sin(x)\times\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\big(\sin(x)\big)^2} = -\frac{\big(\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)\big)^2}{\big(\sin(x)\big)^2} = -1 - \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2$$

$$\text{donc}\quad \text{pour tout } x \in \,]0\,;\pi[,\ \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2 = -1 - f'(x)$$

Une primitive de la fonction proposé est donc l'opposé de la somme d'une primitive de $x \mapsto 1$ et de f, c'est à dire qu'une primitive de $x \mapsto \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2$ est $x \mapsto -x - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Correction de l'exercice 133

1. On note que $\dfrac{9}{13} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{26}$, puis que $\dfrac{5}{26} - \dfrac{1}{5} < 0$ alors que $\dfrac{5}{26} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{39}$. On en déduit l'écriture voulue du rationnel étudié, à savoir

$$\frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{39}$$

2. Ne supposons pas que l'algorithme proposé va donner l'écriture de départ, sous prétexte que cette écriture est de la bonne forme. En effet, rien ne dit que l'écriture d'un rationnel appartenant à $]0\,;1[$ sous la forme de la somme d'inverses d'entiers plus grands que 2 est unique. Ce n'est d'ailleurs pas le cas, comme la solution de cette question va le montrer. Notons d'une part que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

On vérifie alors que $\dfrac{15}{16} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{16}$ puis que $\dfrac{7}{16} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{48}$. Enfin $\dfrac{5}{48} - \dfrac{1}{9} < 0$ alors que $\dfrac{5}{48} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{240}$.
Finalement, l'algorithme proposé nous conduit à une nouvelle décomposition du rationnel de départ, à savoir

$$\frac{15}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{240}$$

3. On vérifie à la machine que $\dfrac{15}{61} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{22} + \dfrac{1}{2237} + \dfrac{1}{15010270}$.

Correction de l'exercice 134

1 **.** Procédons par **récurrence**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n :\ u_n \geqslant 0$. L'assertion H_0 est vraie par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie. Comme u_n est positif, il en est de même des réels $2u_n + 6$ et $u_n + 1$ donc de leur quotient. Finalement H_{n+1} est vrai. Le principe de récurrence assure alors que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.

2 **.** On note que $\dfrac{u_0 - 3}{u_0 + 2} = -\dfrac{2}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{\dfrac{2u_n + 6}{u_n + 1} - 3}{\dfrac{2u_n + 6}{u_n + 1} + 2} = \dfrac{\dfrac{-u_n + 3}{u_n + 1}}{\dfrac{4u_n + 8}{u_n + 1}} = \dfrac{-u_n + 3}{4u_n + 8} = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}$.

La suite $\left(\dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de premier terme $-\dfrac{2}{3}$ et de raison $-\dfrac{1}{4}$.

3 **.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La question précédente assure que

$$\begin{aligned}
& \frac{u_n - 3}{u_n + 2} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\
\text{donc}\quad & \frac{u_n - 3}{u_n + 2} = -\frac{2}{3(-4)^n} \\
\text{donc}\quad & 3(-4)^n\big(u_n - 3\big) = -2\big(u_n + 2\big) \\
\text{donc}\quad & 3(-4)^n u_n - 9(-4)^n = -2u_n - 4 \\
\text{donc}\quad & \big(3(-4)^n + 2\big)u_n = 9(-4)^n - 4
\end{aligned}$$

Comme on divise par des facteurs non nuls, on a donc montré que donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{9(-4)^n - 4}{3(-4)^n + 2}$.

Correction de l'exercice 135

1 **.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le réel u_n est la somme des inverses des entiers compris entre $n+1$ et $2n$ et le réel u_{n+1} est la somme des inverses des entiers entre $(n+1)+1$ et $2(n+1)$, c'est à dire entre $n+2$ et $2n+2$. Autrement dit

$$\begin{aligned}
& u_n = \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
\text{et}\quad & u_{n+1} = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}
\end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes, on a placé entre parenthèses les termes communs des deux sommes. Il apparaît alors que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

Vous noterez la mise au même dénominateur en deux temps, fondée sur le regroupement initial des inverses de $n+1$ et de $2n+2$. La forme finale de l'expression assure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2 **.** Il existe exactement n entiers compris entre $n+1$ et $2n$. Le réel u_n apparaît donc comme la somme des inverses de n entiers qui sont tous plus grands que $n+1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$$

La dernière majoration est claire. Ne pas oublier de montrer que u_n est plus petit qu'un réel indépendant de n pour montrer que la suite est majorée. Le réel 1 convient ici.

3 **.** Vous avez vu en Terminale que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tant que suite réelle croissante et majorée.

La suite étudiée est formée de rationnels puisque chacun de ses termes est la somme d'inverses d'entiers. Si on se limite à ne considérer que des rationnels, cette suite ne converge pas; on peut en effet montrer que sa limite n'est pas rationnelle. Autrement dit, on peut trouver une suite croissante et majorée de rationnels qui ne possède pas de limite rationnelle. L'ensemble des réels a été introduit pour corriger ce défaut de $\mathbb{Q}$ et c'est pourquoi ce phénomène ne peut pas survenir si on travaille dans l'ensemble des réels. En effet, toute suite croissante et majorée de réels admet une limite réelle. Nous évoquerons cette motivation de la construction de l'ensemble des réels, qui a été effectuée dans la deuxième moitié du XIX^e siècle.

Correction de l'exercice 136

1. $(a-1)S = (a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6) - (1+a+a^2+a^3+a^4+a^5) = a^6-1$. Comme $a-1 \neq 0$, $S = \dfrac{a^6-1}{a-1}$.
2. On note de même en développant et simplifiant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = a^{n+1}-1$. Comme $a-1 \neq 0$, on peut diviser de chaque coté de l'identité par $a-1$ pour trouver finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$
3. Avec 10 bits, on peut écrire tous les entiers naturels entre 0000000000 et 1111111111, soit 0 et $2^0+2^2+\cdots+2^9$. La question précédente assure que ce dernier entier est $2^{10}-1$ soit 1023.

Correction de l'exercice 137

- Procédons par **récurrence**. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit H_n : $p_n \leqslant 2^{(2^{n-1})}$. L'assertion H_1 est vraie par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H_1, \ldots, H_n$ soient vraies. En utilisant successivement l'hypothèse de l'énoncé puis les assertions $H_1, \ldots, H_n$, on calcule
$$\begin{array}{ll} & p_{n+1} \leqslant 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n \\ \text{donc} & p_{n+1} \leqslant 1 + 2^{(2^0)} \times 2^{(2^1)} \times \cdots \times 2^{(2^{n-1})} \\ \text{donc} & p_{n+1} \leqslant 1 + 2^{(2^0+2^1+2^2+\ldots 2^{n-1})} \\ \text{Or} & 2^0+2^1+2^2+\ldots 2^{n-1} = \dfrac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1 \\ \text{donc} & p_{n+1} \leqslant 1 + 2^{(2^n-1)} \\ \text{Or} & 2^{(2^n-1)} = \dfrac{1}{2} \times 2^{(2^n)} \\ \text{et} & 1 \leqslant \dfrac{1}{2} \times 2^{(2^n)} \\ \text{donc} & p_{n+1} \leqslant 2^{(2^n)} \end{array}$$
Autrement dit, H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie. C'est exactement le résultat voulu.

Correction de l'exercice 138

- On travaille comme dans la remarque du cours de base page 9 et dans l'exemple qui suit. Sur ce thème, on peut aussi revoir l'exercice 11. Déterminons en premier lieu deux réels a et b tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $a(x^2+1)+b(x^2-1)$ soit une constante indépendante de x. Afin d'éliminer les termes en x^2, on choisit a et b opposé l'un de l'autre. Par exemple
$$\begin{array}{l} \quad\text{pour tout } x \in \mathbb{C},\ (x^2+1)-(x^2-1) = 2 \\ \text{donc pour tout } x \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\},\ \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{2}{(x^2-1)(x^2+1)} \\ \text{donc pour tout } x \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\},\ \dfrac{1}{2(x^2-1)} - \dfrac{1}{2(x^2+1)} = \dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} \end{array}$$
On note de même que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(x-1)-(x+1) = 2$
$$\begin{array}{l} \text{donc pour tout } x \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1\},\ \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} \\ \text{donc pour tout } x \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1\},\ \dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} = \dfrac{1}{2(x-1)(x+1)} \end{array}$$
En substituant cette identité dans la précédente, on obtient finalement que pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$,
$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Correction de l'exercice 139

1. Pour le développement du cube, on peut travailler en développant $(x+y)(x+y)^2$ ou utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8. Quelle que soit la méthode, on obtient $s^2 = x^2+y^2+2xy$ et $s^3 = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$.
2. En exploitant les calculs de la question précédente, on note que
$$\begin{array}{ll} & x^2+y^2 = s^2-2xy = s^2-2p \\ \text{et} & x^3+y^3 = s^3-3x^2y-3xy^2 = s^3-3xy(x+y) = s^3-3sp \end{array}$$

3. On note, en exploitant la première formule de la question précédente, que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{s}{p}$$

et $$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{(xy)^2}=\frac{s^2-2p}{p^2}$$

4. La deuxième identité trouvée dans la question 2 assure que

$$\left(e^{i\alpha}\right)^3+\left(e^{-i\alpha}\right)^3=\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)^3-3e^{i\alpha}e^{-i\alpha}\left(e^{i\alpha}+e^{i\alpha}\right)$$

donc $e^{3i\alpha}+e^{-3i\alpha}=\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)^3-3\left(e^{i\alpha}+e^{i\alpha}\right)$

Or $e^{3i\alpha}+e^{-3i\alpha}=2\cos(3\alpha)$ et $e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=2\cos(\alpha)$

donc $2\cos(3\alpha)=\big(2\cos(\alpha)\big)^3-3\times 2\cos(\alpha)$

donc $\cos(3\alpha)=4\big(\cos(\alpha)\big)^3-3\cos(\alpha)$

Correction de l'exercice 140

1. Pour calculer s^2 et t^2, on peut utiliser la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8. Pour développer s^3, on effectue le développement du produit $x+y+z$ par la forme développée de s^2; autrement dit, je ne vous propose aucune astuce! Vous devez obtenir

$$s^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

et $$s^3=x^3+y^3+z^3+3xy^2+3xz^2+3x^2y+3yz^2+3x^2z+3y^2z+6xyz$$

et $$t^2=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2$$

2. On note, en exploitant la première formule de la question précédente, que

$$x^2+y^2+z^2=s^2-(2xy+2xz+2yz)=s^2-2t$$

et
$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3 &= s^3-(3xy^2+3xz^2+3x^2y+3yz^2+3x^2z+3y^2z+6xyz)\\ &= s^3-3xy(x+y)-3xz(x+z)-3yz(y+z)-6xyz\\ &= s^3-3xy(x+y+z-z)-3xz(x+y+z-y)-3yz(x+y+z-x)-6xyz\\ &= s^3-3xy(x+y+z)-3xz(x+y+z)-3yz(x+y+z)+3xyz\\ &= s^3-3(xy+yz+xz)(x+y+z)+3xyz\\ &= s^3-3st+3p\end{aligned}$$

et $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{t}{s}$$

et $$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}=\frac{t^2-(2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2)}{(xyz)^2}=\frac{t^2-2xyz(x+y+z)}{(xyz)^2}=\frac{t^2-2sp}{p^2}$$

Correction de l'exercice 141

- On remarque que pour tout entier naturel k compris entre 1 et n, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. On en déduit que

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Le deuxième terme de chaque somme mise entre parenthèses se simplifie avec le premier terme de la somme suivante. On obtient donc

$$S=1-\frac{1}{n+1}$$

Comme toujours, mettre les deux termes de cette dernière expression au même dénominateur n'est pas difficile mais pas non plus utile. Il faudrait savoir à quoi va servir cette nouvelle expression pour en donner une écriture adaptée au problème posé. Sur ce sujet, on pourra relire la correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 142

- On remarque que pour tout entier naturel k compris entre 2 et n, $\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{1}{2(k-1)}-\dfrac{1}{2(k+1)}$. On en déduit que

$$S=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

Le deuxième terme de chaque somme mise entre parenthèses se simplifie avec le premier terme de la somme située juste après la suivante. On obtient donc

$$S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$$

Comme toujours, mettre tous les termes de cette dernière expression au même dénominateur n'est pas difficile mais pas non plus utile. Il faudrait savoir à quoi va servir cette nouvelle expression pour en donner une écriture adaptée au problème posé. Sur ce sujet, on pourra relire la correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 143

1. On peut développer l'expression $n(n+3)+2$ pour obtenir une expression du second degré que l'on factorise en utilisant les formules classiques. Plus efficacement, on peut noter que la fonction $f : n \mapsto n(n+3)+2$ prend la valeur 0 en -1. Le calcul «de tête» du terme constant et du terme en n^2 de l'expression $n(n+3)+2$ assure que l'autre point d'annulation de f est -2; on pourra relire la technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16. On trouve alors sans calcul que $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$
2. On note que $p=(n+1)(n+2)\times n(n+3)=q(q-2)$ d'après la relation de la question précédente.
3. On note que $p+1=q(q-2)+1=q^2-2q+1=(q-1)^2$. Finalement $p+1$ est un carré parfait.

Correction de l'exercice 144

- Une idée de départ consiste à visualiser l'expression comme une expression polynomiale en x, où y est un paramètre. On sait factoriser $x^2+2x-2\times 2^2$, $x^2+3x-2\times 3^2$; on va opérer de même pour $x^2+xy-2y^2$. Notez que la fonction $f : x\mapsto x^2+xy-2y^2$ prend la valeur 0 en y. La technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16, nous permettent de trouver le deuxième point d'annulation c de f. Il vérifie $yc=-2y^2$. Il s'ensuit que $-2y$ est l'autre point d'annulation de f. Finalement,

$$x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$$

- Que ceux qui ne maîtrisent pas encore l'astuce utilisée dans le corrigé qui précède ne paniquent pas! La technique beaucoup plus usuelle consistant à mettre l'expression sous forme canonique est presque aussi efficace; sur ce thème, il faut relire les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35. Dans notre cas, en détaillant chaque étape du calcul,

$$\begin{aligned}x^2+xy-2y^2 &= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2-2y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{9y^2}{4}\\ &=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{3y}{2}\right)^2=\left(x+\frac{y}{2}-\frac{3y}{2}\right)\left(x+\frac{y}{2}+\frac{3y}{2}\right)\end{aligned}$$

donc $\quad x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

Correction de l'exercice 145

- On propose un calcul en plaçant dans la marge droite une référence à chaque identité remarquable utilisée.

$$\begin{array}{l|l} A=\big((x+y)+(z+t)\big)\big((x+y)-(z+t)\big)\big((x-y)+(z-t)\big)\big((x-y)-(z-t)\big) & \text{Regroupement}\\ \quad=\big((x+y)^2-(z+t)^2\big)\big((x-y)^2-(z-t)^2\big) & \text{Usage de [IR3]}\\ \quad=\big(x^2+y^2+2xy-z^2-t^2-2zt\big)\big(x^2+y^2-2xy-z^2-t^2+2zt\big) & \text{Usage de [IR1] et [IR2]}\\ \quad=\big((x^2+y^2-z^2-t^2)+(2xy-2zt)\big)\big((x^2+y^2-z^2-t^2)-(2xy-2zt)\big) & \text{Regroupement}\\ \quad=\big(x^2+y^2-z^2-t^2\big)^2-(2xy-2zt)^2 & \text{Usage de [IR3]}\end{array}$$

Il reste à développer les deux carrés. Le deuxième développement s'effectue à l'aide de [IR2]. Pour le premier, on peut exploiter l'astuce présentée et mise en œuvre dans le corrigé de l'exercice 8. On trouve ainsi

$$A=x^4+y^4+z^4+t^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2x^2t^2-2y^2z^2-2y^2t^2+2z^2t^2-(4x^2y^2+4z^2t^2-8xyzt)$$

donc $\quad A=x^4+y^4+z^4+t^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2x^2t^2-2y^2z^2-2y^2t^2-2z^2t^2+8xyzt$

Correction de l'exercice 146

1. L'objectif est de minorer la fonction $f : x \mapsto (3x^2 - x - 1) - x$. Pour ce faire, il suffit de mettre l'expression de f sous forme canonique, en exploitant les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35. On calcule ainsi

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 3x^2 - x + 1 - x = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$
$$\text{donc} \quad \text{donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ 3x^2 - x + 1 \geqslant x + \frac{2}{3}.$$

2. Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $H_n :\ u_n \geqslant u_0 + 2n/3$ est vraie. L'assertion H_0 est claire. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. La question 1 assure que $u_{n+1} \geqslant u_n + 2/3$ donc, en exploitant H_n, $u_{n+1} \geqslant u_0 + 2n/3 + 2/3$, c'est à dire $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(n+1)/3$. Finalement, H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 + 2n/3$.

3. Comme la suite $(u_0 + 2n/3)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, le théorème de minoration assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 147

1. En exploitant successivement les identités remarquables [IR3] puis [IR1] et [IR2] puis à nouveau [IR3], on note que

$$4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 = (2d - d^2 + r^2 - 1)(2d + d^2 - r^2 + 1).$$
$$\text{donc} \quad 4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 = \big(r^2 - (d-1)^2\big)\big((d+1)^2 - r^2\big).$$
$$\text{donc} \quad 4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 = (r - 1 + d)(r + 1 - d)(d + 1 - r)(d + 1 + r).$$

2. Comme $d > 0$ et $r \geqslant 1$, $d + r - 1 > 0$. Il est de plus évident que $d + r + 1 > 0$. Finalement le réel manipulé est positif si et seulement si $(1 + r - d)(1 - r + d) \geqslant 0$ si et seulement si $r - 1 \leqslant d \leqslant r + 1$ ou $r + 1 \leqslant d \leqslant r - 1$. Le deuxième cas étant impossible, les deux cercles considérés ont un point commun si et seulement si $r - 1 \leqslant d \leqslant r + 1$

On considère deux cercles dans le plan qui n'ont pas le même centre. On appelle $\mathcal{C}_1$ le cercle de rayon le plus petit (ou un des cercles au hasard si les deux sont de même rayon) et o le centre de ce cercle. on appelle $\mathcal{C}_2$ le second cercle et ω son centre. On appelle $\vec{\imath}$ le vecteur colinéaire, de même sens que $\overrightarrow{o\omega}$ et dont la longueur est le rayon de $\mathcal{C}_1$. Ce choix de ce vecteur permet de construire un repère orthonormal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan et précise l'unité de longueur; on peut alors introduire r le rayon de $\mathcal{C}_2$ et d la distance entre o et ω. Finalement, le cadre de l'exercice précédent est le cadre général de l'étude de l'intersection de deux cercles. Au fur et à mesure que la distance entre les centres o et ω de cercles augmente, la nature de l'intersection des deux cercles évolue. Les cinq schémas ci-dessous illustrent les cinq positions relatives possibles pour les cercles considérés.

- Lorsque $0 < d < r-1$, le cercle $\mathcal{C}_1$ est strictement à l'intérieur du disque délimité par le cercle $\mathcal{C}_2$. L'intersection des deux cercles considérés est donc vide. Cette situation est illustrée sur le schéma 1.
- Lorsque $d = r - 1$, le cercle $\mathcal{C}_1$ est encore à l'intérieur du disque délimité par le cercle $\mathcal{C}_2$ mais l'intersection des deux cercles considérés est un point; on dit que ces cercles sont tangents intérieurement. Cette situation est illustrée sur le schéma 2.
- Lorsque $r - 1 < d < r + 1$, l'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est formée par deux points symétriques par rapport à la droite liant les centre des deux cercles. Cette situation est illustrée sur le schéma 3.
- Lorsque $d = r + 1$, le cercle $\mathcal{C}_1$ est à l'extérieur du disque délimité par le cercle $\mathcal{C}_2$ à l'exception d'un point qui est l'intersection des deux cercles considérés; on dit que ces cercles sont tangents extérieurement. Cette situation est illustrée sur le schéma 4.
- Lorsque $r + 1 < d$, le cercle $\mathcal{C}_1$ est strictement à l'extérieur du disque délimité par le cercle $\mathcal{C}_2$. L'intersection des deux cercles considérés est donc vide. Cette situation est illustrée sur le schéma 5.

schéma 1

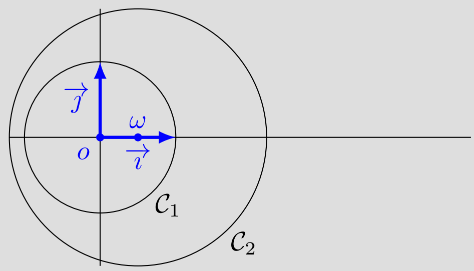
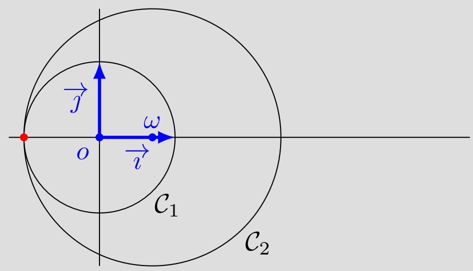
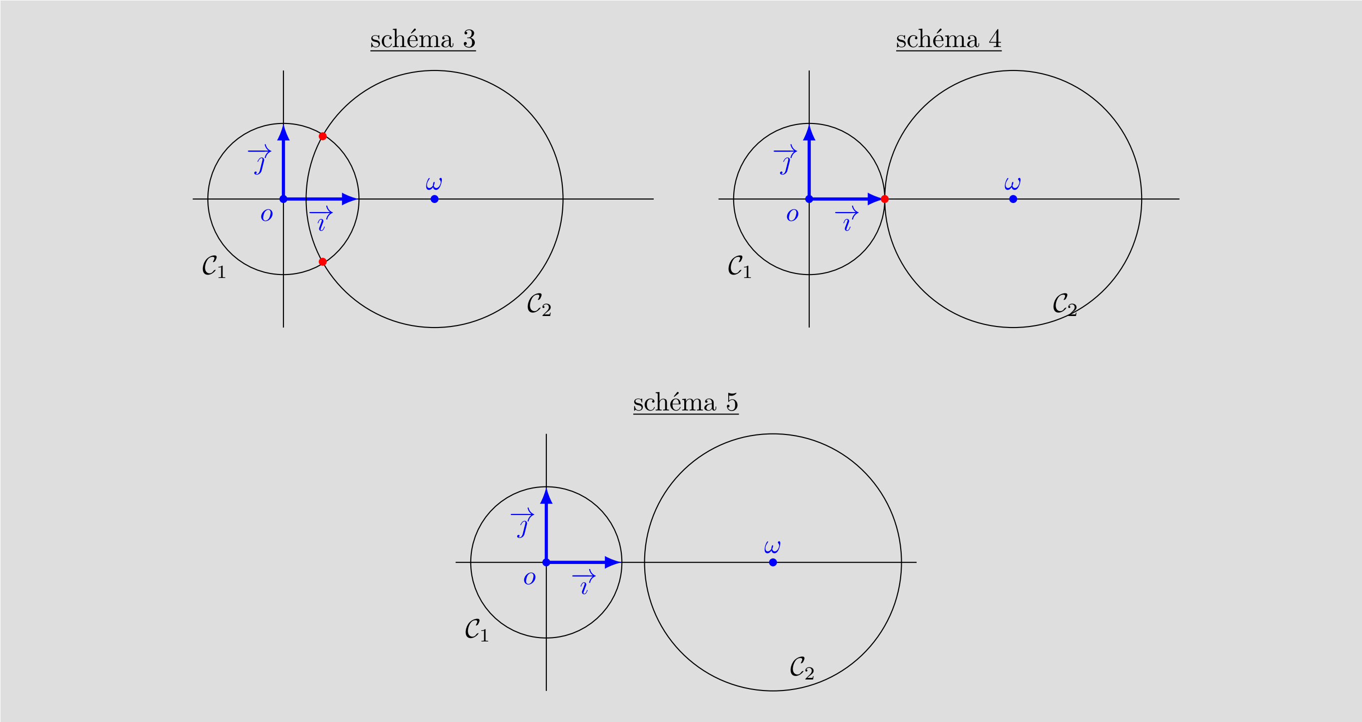


schéma 2





Correction de l'exercice 148

1. On suppose que $x \geqslant y$. On note que $x - y \geqslant 0$ donc $\dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+(x-y)}{2} = x$. Or dans le cas considéré, le plus grand élément de l'ensemble $\{x, y\}$ est bien x. On suppose à présent que $x \leqslant y$. On note que $x - y \leqslant 0$ donc $\dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y-(x-y)}{2} = y$. Or dans ce second cas, le plus grand élément de l'ensemble $\{x, y\}$ est bien y. Finalement, comme tous les cas ont été traités, on a bien montré que pour tout couple (x, y) de réels, le plus grand élément de l'ensemble $\{x, y\}$ est $\dfrac{x-y+|x-y|}{2}$.
2. On montre comme dans la question 1 que pour tout couple (x, y) de réels, le plus petit élément de l'ensemble $\{x, y\}$ est $\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Correction de l'exercice 149

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Travailler en distinguant plusieurs cas suivant le signe de x, y et $x + y$ est pénible car la connaissance du signe des réels x et y ne permet pas toujours de conclure quant au signe de $x + y$, ce qui conduit à diviser certains cas en sous-cas. On exploite plutôt la définition de la valeur absolue d'un nombre pour conclure. En effet $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc $x + y \leqslant |x| + |y|$. De plus $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$. Comme la valeur absolue de $x + y$ est $x + y$ ou $-(x + y)$ et comme ces deux nombres sont plus petits que $|x + y|$, on est sûr que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Correction de l'exercice 150

1. Comme $a + b + c = 0$, on note que $3a = 2a - b - c$ donc $3a = (a - b) + (a - c)$. L'inégalité triangulaire démontrée dans l'exercice 149 assure alors que $|3a| \leqslant |a - b| + |a - c|$ ce qui équivaut à $3|a| \leqslant |a - b| + |a - c|$
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$. On écrit le résultat de la première question pour les triplets (a, b, c), (b, c, a) et (c, a, b) on obtient donc

$$\begin{array}{ll} & 3|a| \leqslant |a-b| + |a-c| \\ \text{et} & 3|b| \leqslant |b-a| + |b-c| \\ \text{et} & 3|c| \leqslant |c-a| + |c-b| \\ \text{donc} & 3\big(|a|+|b|+|c|\big) \leqslant 2|a-b| + 2|b-c| + 2|a-c| \end{array}$$

par simple sommation, en notant que les valeurs absolues du membre de droite se regroupent deux à deux puisque la valeur absolue d'un réel et de son opposé est la même. Il reste à mettre 2 en facteur dans le membre de droite et à diviser par 3 pour obtenir finalement que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$,

$$|a| + |b| + |c| \leqslant \frac{2}{3}\big(|a-b| + |b-c| + |a-c|\big)$$

Correction de l'exercice 151

1 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$. On exploite l'identité [IR3].

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(x^2+3x-4)-(y^2+3y-4)}{x-y} = \frac{x^2-y^2+3(x-y)}{x-y} = \frac{(x+y)(x-y)+3(x-y)}{x-y}$$

donc $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = x+y+3$

2 . Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{5\})^2$ tel que $x \neq y$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{1}{x-y}\left(\frac{2x+3}{x-5} - \frac{2y+3}{y-5}\right) = \frac{(2x+3)(y-5)-(x-5)(2y+3)}{(x-5)(y-5)(x-y)} \\ &= \frac{(2xy-10x+3y-15)-(2xy+3x-10y+15)}{(x-5)(y-5)(x-y)} = \frac{-13x+13y}{(x-5)(y-5)(x-y)}\end{aligned}$$

donc $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{-13}{(x-5)(y-5)}$

Notez que le calcul est bien moins laborieux si on utilise la transformation de l'expression de f présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$,

$$f(t) = \frac{2(t-5)+13}{t-5} = 2 + \frac{13}{t-5}$$

donc $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{13}{x-5} - \dfrac{13}{y-5}\right) = \dfrac{13\big((y-5)-(x-5)\big)}{(x-5)(y-5)(x-y)} = \dfrac{13(y-x)}{(x-5)(y-5)(x-y)} = \dfrac{-13}{(x-5)(y-5)}$

3 . Soit $(x, y) \in [1/4\,; +\infty[^2$ tel que $x \neq y$. On utilise ici la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72.

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{4y-1}}{x-y} = \frac{\left(\sqrt{4x-1}\right)^2 - \left(\sqrt{4y-1}\right)^2}{\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}\right)(x-y)} = \frac{4x-4y}{\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}\right)(x-y)}$$

donc $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{4}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}}$

On reprend les notations de l'exercice précédent. Votre cours de terminale assure que le nombre dérivé de f en y est la limite en y du taux d'accroissement de f entre x et y, lorsque cette limite est finie. Les simplifications menées dans l'exercice qui précède assurent que

- Si f est $x \mapsto x^2+3x-4$, le nombre dérivé de f en un réel y est $2y+3$.
- Si f est $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-5}$, le nombre dérivé de f en un réel y distinct de 5 est $\dfrac{-13}{(y-5)^2}$.
- Si f est $x \mapsto \sqrt{4x-1}$, le nombre dérivé de f en un réel y strictement plus grand que 4 est $\dfrac{2}{\sqrt{4y-1}}$.

  Cette fonction n'est de plus pas dérivable en 4 puisque son taux d'accroissement entre un réel x strictement plus grand que 4 et 4 admet $+\infty$ comme limite en 4.

Correction de l'exercice 152

- La fonction proposée est une forme indéterminée. Notre objectif va donc être de transformer l'écriture de son expression afin que le signe $-$ qui est la source du problème, soit transformé en signe $+$. On utilise alors la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72. Pour tout $x \in\,]1\,; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

La forme obtenue est toujours indéterminée. À présent, on met en facteur au numérateur et au dénominateur le réel x. Notez que sur le domaine de travail utilisé, x est positif donc pour tout réel a positif, $\sqrt{x^2 a} = x\sqrt{a}$. On peut donc écrire pour tout $x \in\,]1\,; +\infty[$,

$$f(x) = \frac{2x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$$

La forme finale n'est plus indéterminée. Comme $x \mapsto 1/x$ admet 0 comme limite en $+\infty$, la limite de f en $+\infty$ est 1.

Correction de l'exercice 153

Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode consiste à fixer les variables puis à écrire l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison sous une forme telle que son signe soit clair (forme factorisée, somme de carrés...)

1 • Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. On note que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2 = \dfrac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \dfrac{(x-y)^2}{xy}$.

Comme le carré d'un réel est positif, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2 \geqslant 0$. Finalement, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

2 • On note, en exploitant la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le carré de manière efficace, que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}\right)(aa' + bb' + cc') - (a+b+c)^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{aa'b}{b'} + \frac{aa'c}{c'} + \frac{bb'a}{a'} + \frac{bb'c}{c'} + \frac{cc'a}{a'} + \frac{cc'b}{b'} - \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\right) \\
&= ab\left(\frac{a'}{b'} + \frac{b'}{a'} - 2\right) + ac\left(\frac{a'}{c'} + \frac{c'}{a'} - 2\right) + bc\left(\frac{b'}{c'} + \frac{c'}{b'} - 2\right)
\end{aligned}$$

Chaque terme de la somme précédente est le produit de deux des trois réels a, b et c, qui sont strictement positifs, et d'un réel positif d'après la première question. Chaque terme de la somme précédente est donc positif. Il s'ensuit que cette somme est positive. Finalement,

$$\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}\right)(aa' + bb' + cc') \geqslant (a+b+c)^2$$

• On suppose à présent que $(a+b+c)^2 \geqslant \dfrac{3}{2}(aa' + bb' + cc')$. Le point précédent assure que

$$\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}\right)(aa' + bb' + cc') \geqslant \frac{3}{2}(aa' + bb' + cc')$$

donc $\quad \dfrac{a}{a'} + \dfrac{b}{b'} + \dfrac{c}{c'} \geqslant \dfrac{3}{2}$

en divisant simplement chaque membre de l'estimation par $aa' + bb' + cc'$ qui est strictement positif par hypothèse sur les réels manipulés. Finalement, pour tout $(a, b, c, a', b', c') \in (\mathbb{R}^{+*})^6$ vérifiant $2(a+b+c)^2 \geqslant 3(aa' + bb' + cc')$, on sait que

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} \geqslant \frac{3}{2}$$

• Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$. Pour montrer le dernier point, on va appliquer le résultat précédent au six réels a, b, c, $b+c$, $c+a$ et $a+b$. Notons en premier lieu que ces réels sont bien strictement positifs puisque la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ appartient à $\mathbb{R}^{+*}$. En exploitant une nouvelle fois la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le carré de manière efficace, on note de plus que

$$\begin{aligned}
&2(a+b+c)^2 - 3\big(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)\big) \\
&= 2\big(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\big) - 3(2ab + 2ac + 2bc) \\
&= 2\big(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\big) \\
&= (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2
\end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est positif et comme la somme de nombres positifs est positive, on déduit du calcul précédent que $2(a+b+c)^2 \geqslant 3\big(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)\big)$. Finalement, on peut bien appliquer le résultat précédent au réels considérés. On obtient alors

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

3 • On note, en exploitant la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le carré de manière efficace, que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \frac{d}{d'}\right)(aa' + bb' + cc' + dd') - (a+b+c+d)^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{aa'b}{b'} + \frac{aa'c}{c'} + \frac{aa'd}{d'} + \frac{bb'a}{a'} + \frac{bb'c}{c'} + \frac{bb'd}{d'} + \frac{cc'a}{a'} + \frac{cc'b}{b'} + \frac{cc'd}{d'} + \frac{dd'a}{a'} + \frac{dd'b}{b'} + \frac{dd'c}{c'} \\
&- \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd\right) \\
&= ab\left(\frac{a'}{b'} + \frac{b'}{a'} - 2\right) + ac\left(\frac{a'}{c'} + \frac{c'}{a'} - 2\right) + ad\left(\frac{a'}{d'} + \frac{d'}{a'} - 2\right) \\
&+ bc\left(\frac{b'}{c'} + \frac{c'}{b'} - 2\right) + bd\left(\frac{b'}{d'} + \frac{d'}{b'} - 2\right) + cd\left(\frac{c'}{d'} + \frac{d'}{c'} - 2\right)
\end{aligned}$$

Chaque terme de la somme précédente est le produit de deux des quatre réels a, b, c et d, qui sont strictement positifs, et d'un réel positif d'après la première question. Chaque terme de la somme précédente est donc positif. Il s'ensuit que cette somme est positive. Finalement,

$$\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{d}{d'}\right)(aa'+bb'+cc'+dd') \geqslant (a+b+c+d)^2$$

- On suppose à présent que $(a+b+c+d)^2 \geqslant 2(aa'+bb'+cc'+dd')$. Le point précédent assure que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{d}{d'}\right)(aa'+bb'+cc'+dd') \geqslant 2(aa'+bb'+cc'+dd') \\ \text{donc} \quad & \frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{d}{d'} \geqslant 2 \end{aligned}$$

en divisant simplement chaque membre de l'estimation par $aa'+bb'+cc'+dd'$ qui est strictement positif par hypothèse sur les réels manipulés. Finalement, pour tout $(a,b,c,d,a',b',c',d') \in (\mathbb{R}^{+*})^8$ vérifiant $(a+b+c+d)^2 \geqslant 2(aa'+bb'+cc'+dd')$, on sait que

$$\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{d}{d'} \geqslant 2$$

- Soit $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^{+*})^4$. Pour montrer le dernier point, on va appliquer le résultat précédent au huit réels a, b, c, d, $b+c$, $c+d$, $d+a$ et $a+b$. Notons en premier lieu que ces réels sont bien strictement positifs puisque la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ appartient à $\mathbb{R}^{+*}$. En exploitant une nouvelle fois la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le carré de manière efficace, on note de plus que

$$\begin{aligned} & (a+b+c+d)^2 - 2\big(a(b+c)+b(c+d)+c(a+d)+d(a+b)\big) \\ = \ & a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd-2(ab+2ac+bc+2bd+cd+ad) \\ = \ & a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd \\ = \ & (a-c)^2+(b-d)^2 \end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est positif et comme la somme de nombres positifs est positive, on déduit du calcul précédent que $(a+b+c+d)^2 \geqslant 2\big(a(b+c)+b(c+d)+c(a+d)+d(a+b)\big)$. Finalement, on peut bien appliquer le résultat précédent au réels considérés. On obtient alors

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geqslant 2$$

Correction de l'exercice 154

1. Le produit de deux nombres positifs plus petits que 1 est plus petit que 1. On en déduit que chaque facteur du produit considéré est négatif. Il s'ensuit que $(ab-1)(ac-1)(bc-1) \leqslant 0$.
2. La méthode standard de preuve d'identités qui sont des inégalités consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. Mais dans cet exercice, il est vraisemblable que la question 1 nous donne l'expression factorisée utile. On va donc développer cette expression pour faire apparaître celle qui nous intéresse. Ainsi, la question 1 assure que

$$\begin{aligned} & a^2b^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2+ab+ac+bc-1 \leqslant 0 \\ \text{donc} \quad & a^2bc+ab^2c+abc^2+1 \geqslant a^2b^2c^2+ab+ac+bc \\ \text{donc} \quad & a+b+c+\frac{1}{abc} \geqslant abc+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a} \end{aligned}$$

en divisant chaque membre de l'identité par abc qui est strictement positif en tant que produit de trois réels ayant cette propriété. Finalement, pour tout $(a,b,c) \in \,]0\,;1]^3$,

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geqslant abc+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$$

3. Soit a, b, c et d quatre réels tels que $0<a<b<c<d$. On note que a/b, b/c et c/d appartiennent à $]0\,;1[$ donc en particulier à $]0\,;1]$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{1}{\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}} \geqslant \frac{1}{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\frac{b}{c}}+\frac{1}{\frac{c}{d}}+\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d} \\ \text{donc} \quad & \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{a}{d} \geqslant \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d} \end{aligned}$$

après simplification des fractions qui apparaissent.

Correction de l'exercice 155

- Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode de base consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. On note que
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy}$$
Comme le carré d'un réel est positif, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geqslant 0$. Finalement, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.
- Le calcul initial assure que l'on a égalité si et seulement si $\frac{(x-y)^2}{xy} = 0$ si et seulement si $x = y$.

Correction de l'exercice 156

- Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode consiste à fixer les variables puis à écrire l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison sous une forme telle que son signe soit clair (forme factorisée, somme de carrés...). Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$. On note que
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - \frac{3}{x+y+z} &= \frac{(x+y+z)(xy+xz+yz)-9xyz}{3xyz(x+y+z)} \\ &= \frac{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y-6xyz}{3xyz(x+y+z)} \\ &= \frac{x(y^2+z^2-2yz)+y(x^2+z^2-2xz)+z(x^2+y^2-2xy)}{3xyz(x+y+z)} \\ \text{donc}\quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - \frac{3}{x+y+z} &= \frac{x(y-z)^2+y(x-z)^2+z(x-y)^2}{3xyz(x+y+z)}\end{aligned}$$
Comme x, y et z sont strictement positifs, $3xyz(x+y+z) > 0$. De plus, le carré d'un réel étant toujours positif, on sait aussi que le dénominateur du membre de droite de l'identité précédente est la somme de trois réels positifs donc est positive. Finalement l'expression manipulée est positive donc pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$,
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{3}{x+y+z}$$
- On exploite à nouveau l'identité précédente. On a égalité dans l'estimation si et seulement si
$$\frac{x(y-z)^2+y(x-z)^2+z(x-y)^2}{3xyz(x+y+z)} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x(y-z)^2+y(x-z)^2+z(x-y)^2 = 0$$
Or la somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque terme de cette somme est nul. On a donc égalité dans l'estimation si et seulement si $x(y-z)^2 = 0$ et $y(x-z)^2 = 0$ et $z(x-y)^2 = 0$. Chacun des trois réels précédent est le produit d'un réel strictement positif et du carré d'un réel; il est donc nul si et seulement si le nombre mis au carré est nul. Finalement, on a égalité dans l'estimation établie dans le premier point si et seulement si les trois réels x, y et z sont les mêmes.

Correction de l'exercice 157

- Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode de base consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Dans notre cas, afin de faire «disparaître» les racines carrées, on compare les carrés des réels manipulés. Soit donc x et y deux réels positifs.
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{x+y}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 &= \frac{x+y}{2} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}}{4} \\ &= \frac{2(x+y)-(x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y})}{4} \\ &= \frac{x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}}{4} \\ \text{donc}\quad \left(\sqrt{\frac{x+y}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 &= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{4}\end{aligned}$$

Comme le carré d'un nombre réel est positif, on a montré que $\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}\right)^2 \geqslant \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$. On note à présent que les réels $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$ et $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$ sont positifs. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on en déduit bien que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$.

Correction de l'exercice 158

1 • On utilise la transformation présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. Pour revoir les fautes à éviter sur cette question, vous pourrez aussi relire le corrigé de l'exercice 38. Soit $x \in]1\,;3[$,

$$\frac{5x-3}{x+1} = \frac{5(x+1)-8}{x+1} = 5 - \frac{8}{x+1}$$

Or $\quad 2 < x+1 < 4$

donc $\quad 2 < \dfrac{8}{x+1} < 4$

donc $\quad -4 < -\dfrac{8}{x+1} < -2$

donc $\quad 1 < 5 - \dfrac{8}{x+1} < 3$

Finalement, pour tout $x \in]1\,;3[$, $\dfrac{5x-3}{x+1} \in]1\,;3[$

• Connaissant l'intervalle final, on peut travailler différemment en considérant que la question est la preuve de deux identités fondées sur des inégalités. Pour gérer ce genre de problème, vous pourrez relire les exemples de la cinquième leçon et les corrigés des exercices 25, 26 et 53. Soit $x \in]1\,;3[$,

$$\frac{5x-3}{x+1} - 1 = \frac{(5x-3)-(x+1)}{x+1} = \frac{4(x-1)}{x+1}$$

et $\quad 3 - \dfrac{5x-3}{x+1} = \dfrac{3(x+1)-(5x-3)}{x+1} = \dfrac{2(3-x)}{x+1}$

Comme $x+1>0$, $x-1>0$ et $3-x>0$, on sait que les deux quotients étudiés sont strictement positifs et on retrouve le résultat du point précédent.

2 • On procède par **récurrence**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : $u_n \in]1\,;3[$. L'assertion H_0 est vraie puisque l'on a choisi $u_0 = 2$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie. On sait alors que $u_n \in]1\,;3[$. En appliquant le résultat de la question précédente, on en déduit que $\dfrac{5u_n-3}{u_n+1} \in]1\,;3[$ c'est à dire que $u_{n+1} \in]1\,;3[$. Finalement, H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure finalement que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $]1\,;3[$.

3 • L'objet de cette question est encore d'établir une identité fondée sur une inégalité. On travaille donc en suivant la même idée que dans le deuxième corrigé de la première question. Soit $x \in]1\,;3[$,

$$x - \frac{5x-3}{x+1} = \frac{x^2-4x+3}{x+1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x+1}$$

Notez que la fonction $f : x \mapsto x^2-4x+3$ prend la valeur 0 en 1. La technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16, nous permettent de trouver le deuxième point d'annulation de f, à savoir 3, ce qui permet une factorisation directe du numérateur de l'expression que l'on vient de manipuler. Comme $1<x<3$, on sait que $(x-1)(x-3)<0$. Sachant aussi que $x+1>0$, on a finalement montré que pour tout $x \in]1\,;3[$,

$$\frac{5x-3}{x+1} > x$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in]1\,;3[$, on peut exploiter le premier point et écrire que $\dfrac{5u_n-3}{u_n+1} > u_n$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

4 • La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 d'après la question 2. Elle converge donc.

5. Notons L la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le cours assure que les suites $(5u_n-3)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $5L-3$ et $L+1$. Comme tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $]1\,;3[$, le cours assure aussi que L appartient à $[1\,;3]$ donc, en particulier, que $L+1\neq 0$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{5L-3}{L+1}$. Or cette suite est $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L. L'unicité de la limite d'une suite convergente assure alors que $\dfrac{5L-3}{L+1}=L$ donc $5L-3=L(L+1)$ donc $L^2-4L+3=0$. On a déjà trouvé les point d'annulation de cette expression de degré 2 dans la question 3. On sait donc que $L=1$ ou $L=3$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et comme $u_0=2$, on sait aussi que $L\geqslant 2$. Finalement on a montré que $L=3$.

6. On note que $\dfrac{u_0-1}{u_0-3}=-1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-3}=\dfrac{\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}-1}{\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}-3}=\dfrac{\dfrac{4u_n-4}{u_n+1}}{\dfrac{2u_n-6}{u_n+1}}=\dfrac{4u_n-4}{2u_n-6}=2\times\dfrac{u_n-1}{u_n-3}$.

La suite $\left(\dfrac{u_n-1}{u_n-3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de premier terme -1 et de raison 2.

- Soit $n\in\mathbb{N}$. La conclusion précédente assure que

$$\frac{u_n-1}{u_n-3}=-2^n$$

donc $\quad u_n-1=-2^n\big(u_n-3\big)$

donc $\quad \big(1+2^n\big)u_n=1+3\times 2^n$

Comme on divise par des facteurs non nuls, on a donc montré que donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1+3\times 2^n}{1+2^n}$.

- L'expression des termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée dans le point précédent ne permet pas de calculer directement la limite de cette suite puisque l'on obtient une forme indéterminée. Mais on note que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{\big(2^{-n}+3\big)2^n}{\big(2^{-n}+1\big)2^n}=\frac{2^{-n}+3}{2^{-n}+1}$$

Comme la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 3. On retrouve donc bien les résultats des questions 4 et 5.

Correction de l'exercice 159

- Soit $x\in\mathbb{R}$. On note que $\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{3x}+1=\big(\mathrm{e}^{3x}\big)^2-\mathrm{e}^{3x}+1$. Il apparaît une **expression polynomiale** du second degré «en e^{3x}» dont on doit étudier le signe. Il suffit de la mettre sous forme canonique, en exploitant les exemples du cours page 11 et le corrigé des exercices 14 et 35. On calcule ainsi

$$\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{3x}+1=\left(\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Sous cette forme, il est clair que $\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{3x}+1\geqslant 0$.

Correction de l'exercice 160

1. La formule [LE2] assure que pour tout réel y strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln(y)}=y$. En utilisant la même formule et la formule [ER2], on sait aussi que pour tout réel y strictement positif, $\mathrm{e}^{-\ln(y)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(y)}}=\dfrac{1}{y}$. Soit alors $x\in\mathbb{R}$. On note que $x^2+1>x^2$. Comme la fonction racine carrée est croissante, $\sqrt{x^2+1}>|x|$. Or $|x|\geqslant -x$. Donc $\sqrt{x^2+1}>-x$ et on en déduit que $x+\sqrt{x^2+1}>0$. On peut donc exploiter les deux remarques initiales pour écrire

$$\begin{aligned}f\big(\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)\big)&=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)^2-1}{2\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)}\\&=\frac{x^2+\big(\sqrt{x^2+1}\big)^2+2x\sqrt{x^2+1}-1}{2\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)}=\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)}=\frac{2x\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)}{2\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)}\end{aligned}$$

donc $\quad f\big(\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)\big)=x$

2. Soit $x\in\mathbb{R}^+$.

$$f(x)^2+1=\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2+1=\frac{\big(\mathrm{e}^x\big)^2+\big(\mathrm{e}^{-x}\big)^2-2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}+4}{4}$$

Or $\quad 4=4\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}$

donc $\quad f(x)^2+1=\dfrac{\big(\mathrm{e}^x\big)^2+\big(\mathrm{e}^{-x}\big)^2+2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4}=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$

Comme une somme d'exponentielles est positive, on en déduit en utilisant successivement le fait que la racine carrée du carré d'un réel positif y est y, puis l'expression explicite de $f(x)$ et enfin la formule [LE1]

$$\begin{aligned}
&\sqrt{f(x)^2+1} = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\\
\text{donc}\quad & f(x)+\sqrt{f(x)^2+1} = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{e}^x\\
\text{donc}\quad & \ln\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}\right) = x
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 161

1. La formule [LE2] assure que pour tout réel y strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$. En utilisant la même formule et la formule [ER2], on sait aussi que pour tout réel y strictement positif, $\mathrm{e}^{-\ln(y)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(y)}} = \dfrac{1}{y}$. Soit alors $x \in [1\,;+\infty[$. On note que $x+\sqrt{x^2-1}$ est la somme de deux nombres positifs, le premier étant non nul, donc $x+\sqrt{x^2-1} > 0$. On peut donc exploiter les deux remarques initiales pour écrire

$$\begin{aligned}
f\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\\
&= \frac{x^2+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+2x\sqrt{x^2-1}+1}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\\
\text{donc}\quad f\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) &= x
\end{aligned}$$

2. Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode de base consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Soit donc $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x)-1 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)-1 = \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2+1-2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x} = \frac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}{2\mathrm{e}^x}$$

en utilisant l'identité remarquable [IR2]. Comme le carré d'un réel et une exponentielle réelle sont positifs, on en déduit que $f(x)-1 \geqslant 0$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La question précédente assure que le calcul qui suit est licite.

$$\begin{aligned}
& f(x)^2-1 = \left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-1 = \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2+2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}-4}{4}\\
\text{Or}\quad & 4 = 4\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}\\
\text{donc}\quad & f(x)^2-1 = \frac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2-2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4} = \left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Comme $x \geqslant 0$, on sait que $x \geqslant -x$. Comme la fonction exponentielle est positive, on en déduit que $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{-x}$ c'est à dire que $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$. En utilisant alors successivement le fait que la racine carrée du carré d'un réel positif y est y, puis l'expression explicite de $f(x)$ et enfin la formule [LE1] que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{f(x)^2-1} = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\\
\text{donc}\quad & f(x)+\sqrt{f(x)^2-1} = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{e}^x\\
\text{donc}\quad & \ln\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2-1}\right) = x
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 162

1. Le graphe tracé est celui de la droite d'équation $y = -2x+a$, où a est l'ordonnée à l'origine. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\ln(n) \geqslant 0$, $\ln(|u_n-\pi|) = -2\ln(n)+a$ donc que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $n^2|u_n-\pi| = \mathrm{e}^a$. C'est cohérent avec le résultat annoncé et même bien plus fort puisque la suite semble quasiment constante sur la place d'indice considérée.

2. La question précédente assure que $\alpha \simeq 2$. On peut de plus lire graphiquement la valeur de a, à savoir environ -2 et donc estimer C d'après la question précédente. On trouve ainsi que $C \simeq \mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}13$.

Correction de l'exercice 163

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&=\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\left(\frac{5}{4}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&=\ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right)\\
&=\ln\left(\frac{\big(3\times 4\times 5\times\cdots\times n\big)\times(n+1)}{2\times\big(3\times 4\times 5\times\cdots\times n\big)}\right)\\
&=\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

On a exploité la formule [LN1] dans la deuxième étape et mis en évidence à l'aide de parenthèses un facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fraction apparaissant dans la troisième étape. Sous cette forme simplifiée, la limite de la suite manipulée est clairement $+\infty$.

Correction de l'exercice 164

- Dans une première étude, on ne transforme pas l'écriture proposée pour A. Il faut en premier lieu encadrer x^2; on pourra revoir le corrigé de l'exercice 37 sur ce sujet. Si $x \geqslant 0$ alors comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $0 \leqslant x^2 \leqslant 2^2$. Si $x \leqslant 0$ alors comme la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on sait que $0 \leqslant x^2 \leqslant (-1)^2$. En conservant la moins bonne des deux estimations, on sait que dans tous les cas $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. On en déduit

$$\begin{array}{ll}
 & -1 \leqslant 2x^2-1 \leqslant 7\\
\text{Or} & x^2+1>0\\
\text{donc} & \dfrac{-1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{2x^2-1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{7}{x^2+1}\\
\text{Or} & x^2+1 \geqslant 1 \text{ donc } \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1 \text{ donc } \dfrac{7}{x^2+1} \leqslant 7\\
\text{et} & -\dfrac{1}{x^2+1} \geqslant -1\\
\text{d'où} & -1 \leqslant \dfrac{2x^2-1}{x^2+1} \leqslant 7
\end{array}$$

Faire attention à ne pas encadrer $\dfrac{1}{x^2+1}$ pour «multiplier» cet encadrement avec celui de $2x^2-1$. En effet, on ne manipule pas des grandeurs positives. Finalement notre encadrement brutal est mauvais. On peut plutôt utiliser la transformation présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. Ainsi

$$\frac{2x^2-1}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)-3}{x^2+1}=2-\frac{3}{x^2+1}$$

En utilisant à nouveau le fait que $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$, on calcule à présent $1 \leqslant x^2+1 \leqslant 5$.

$$\begin{array}{ll}
\text{donc} & \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1.\\
\text{donc} & -3 \leqslant -\dfrac{3}{x^2+1} \leqslant -\dfrac{3}{5}.\\
\text{d'où} & -1 \leqslant \dfrac{2x^2-1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{7}{5}.
\end{array}$$

Cet encadrement est optimal. En effet, si $x=0$ alors $\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=-1$ et si $x=2$ alors $\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{7}{5}$.

Correction de l'exercice 165

- Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$. On note que $1+t^4 \geqslant t^4$. Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit que $\sqrt{1+t^4} \geqslant \sqrt{t^4}$. Or $\sqrt{t^4}=\sqrt{(t^2)^2}=|t^2|=t^2$ puisque le carré d'un réel est positif. Finalement, on a montré que $\sqrt{1+t^4} \geqslant t^2$, estimation centrale que l'on appelle (1).
- Sachant que $\sqrt{1+t^4}>0$, l'estimation (1) permet d'écrire $\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant 1$, c'est à dire $0 \leqslant 1-\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}$.

- Pour prouver la deuxième estimation, on utilise alors la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72. En effet

$$1-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{\sqrt{1+t^4}-t^2}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{\left(\sqrt{1+t^4}\right)^2-(t^2)^2}{\sqrt{1+t^4}\left(\sqrt{1+t^4}+t^2\right)}=\frac{(1+t^4)-t^4}{\sqrt{1+t^4}\left(\sqrt{1+t^4}+t^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+t^4}\left(\sqrt{1+t^4}+t^2\right)}$$

On utilise alors deux fois l'estimation (1). D'une part, $\sqrt{1+t^4}\geqslant t^2$ et d'autre part $\sqrt{1+t^4}+t^2\geqslant 2t^2$. Comme ces deux estimations ne mettent en jeu que des réels positifs, on en déduit que $\sqrt{1+t^4}\left(\sqrt{1+t^4}+t^2\right)\geqslant 2t^4$. Le caractère strictement positifs des réels mis en jeu et le fait que la fonction $x\mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ assurent enfin que

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}\left(\sqrt{1+t^4}+t^2\right)}\leqslant\frac{1}{2t^4}$$

En utilisant cette estimation et le résultat du premier calcul, et en regroupant cette deuxième estimation et celle obtenue dans le point précédent, on a finalement montré que pour tout $t\in\mathbb{R}^{+*}$,

$$0\leqslant 1-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\leqslant\frac{1}{2t^4}$$

Correction de l'exercice 166

1. Comme la fonction racine carrée est croissante $\sqrt{n+1}\geqslant\sqrt{n}$. On en déduit que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geqslant 2\sqrt{n}$. Comme on ne manipule que des réels strictement positifs et comme la fonction $x\mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}\quad\text{donc}\quad\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

en utilisant la méthode de la «quantité conjuguée» présentée à la page 15 du cours et mise en œuvre dans les exercices 22, 23, 67 et 72. Notez que l'emploi de cette méthode était prévisible puisqu'elle permet de faire passer des racines carrées du dénominateur d'une fraction à son numérateur. Finalement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On travaille comme dans la question précédente. Comme la fonction racine carrée est croissante $\sqrt{n}\geqslant\sqrt{n-1}$. On en déduit que $2\sqrt{n}\geqslant\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$. Comme on ne manipule que des réels strictement positifs et comme la fonction $x\mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\quad\text{donc}\quad\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}$$

en utilisant une fois encore la méthode de la «quantité conjuguée». Finalement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

3. On exploite le résultat de la question 1. Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 10000, on sait ainsi que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. On effectue la somme de ces 10000 estimations, ce qui conduit à

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{10000}-\sqrt{9999}\right)+\left(\sqrt{10001}-\sqrt{10000}\right)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{9999}}+\frac{1}{2\sqrt{10000}}$$
$$\text{donc}\quad\sqrt{10001}-1\leqslant\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{9999}}+\frac{1}{2\sqrt{10000}}$$

en notant que le premier terme de chaque parenthèse du membre de gauche de l'estimation se simplifie avec le deuxième terme de la parenthèse suivante. On exploite à présent de manière analogue le résultat de la question 2. Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 10000, on sait ainsi que $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. On effectue la somme de ces 10000 estimations, ce qui conduit à

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{9999}}+\frac{1}{2\sqrt{10000}}\leqslant\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{9999}-\sqrt{9998}\right)+\left(\sqrt{10000}-\sqrt{9999}\right)$$
$$\text{donc}\quad\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{9999}}+\frac{1}{2\sqrt{10000}}\leqslant\sqrt{10000}$$

en notant qu'à nouveau, le premier terme de chaque parenthèse du membre de droite de l'estimation se simplifie avec le deuxième terme de la parenthèse suivante. En regroupant les deux estimations, on a donc montré que

$$\sqrt{10001}-1 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{9999}}+\frac{1}{2\sqrt{10000}} \leqslant \sqrt{10000}$$

Or $\sqrt{10000}=100$ et un calcul approché assure que $\sqrt{10001}-1>99$. On a donc bien montré que $\displaystyle\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{2\sqrt{n}} \in]99\,;100]$.

Correction de l'exercice 167

1 . La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

On note que la fonction f' ne prend que des valeurs positives sur l'intervalle $]0\,;1]$. Il s'ensuit que la fonction f est croissante sur $]0\,;1]$. Donc pour tout $x \in]0\,;1]$, $f(x) \leqslant f(1)$. De manière analogue, la fonction f' ne prend que des valeurs négatives sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, $f(x)\leqslant f(1)$. Finalement f est majorée par $f(1)$. Comme $f(1)=0$, on a montré que pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $f(x)\leqslant 0$. En exploitant l'expression explicite de f, on a bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x)\leqslant x-1$.

2 . L'objet de cette question est de prouver deux identités fondées sur des inégalités. La méthode standard de ce type de preuve consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. Mais dans cet exercice, cette méthode est clairement à proscrire. En effet, d'une part les expressions à manipuler combinent des **expressions rationnelles** et des logarithmes, que l'on ne sait pas manipuler conjointement. D'autre part, il est vraisemblable que la question 1 nous donne l'estimation utile pour conclure. Soit $x\in[0\,;1[$. On note que $1-x\in]0\,;1]$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente.

$$\ln(1-x)\leqslant(1-x)-1 \quad \text{c'est à dire} \quad \ln(1-x)\leqslant -x$$

De plus $\dfrac{1}{1-x}\in]0\,;1]$. On peut donc appliquer encore le résultat de la question précédente.

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\leqslant\frac{1}{1-x}-1 \quad \text{c'est à dire} \quad -\ln(1-x)\leqslant\frac{x}{1-x}$$

en utilisant la propriété [LN2] et en mettant au même dénominateur les deux termes du membre de droite de la dernière estimation. Il suffit de multiplier chaque membre de la dernière estimation par -1 et de regrouper les deux résultats pour obtenir le fait que pour tout $x\in]0\,;1]$,

$$\frac{x}{x-1}\leqslant\ln(1-x)\leqslant -x$$

3 . On applique l'estimation de la question 2 en 10^{-7} qui appartient bien à $[0\,;1[$. On obtient ainsi

$$\frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}\leqslant\ln(1-10^{-7})\leqslant-10^{-7}$$

$$\text{Or}\quad \frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}+10^{-7}+10^{-13}=10^{-7}\left(\frac{1}{10^{-7}-1}+1\right)+10^{-13}=\frac{\left(10^{-7}\right)^2}{10^{-7}-1}+10^{-13}$$
$$=\frac{10^{-14}}{10^{-7}-1}+10^{-13}=10^{-13}\left(\frac{10^{-1}}{10^{-7}-1}+1\right)=\frac{10^{-13}\left(10^{-1}+10^{-7}-1\right)}{10^{-7}-1}$$

$$\text{donc}\quad \frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}+10^{-7}+10^{-13}\geqslant 0$$

En effet numérateur et dénominateur de la dernière expression sont clairement strictement négatifs. On en déduit

$$-10^{-7}-10^{-13}\leqslant\frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}$$
$$\text{donc}\quad -10^{-7}-10^{-13}\leqslant\ln(1-10^{-7})\leqslant-10^{-7}$$

en utilisant la toute première estimation.

4 . En utilisant la croissance de la fonction ln et la propriété [LN1], on déduit de la partie droite de l'encadrement définissant p, l'estimation $\ln(0{,}99)\leqslant p\ln(1-10^{-7})$. La question 3 assure alors

$$\ln(1-10^{-7})\leqslant-10^{-7} \text{ et } p\geqslant 0$$

$$\text{donc}\quad p\ln(1-10^{-7})\leqslant -p10^{-7}$$

donc $\ln(0{,}99) \leqslant -p10^{-7}$

donc $\ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7} \leqslant \left(\dfrac{2p+1}{2} - p\right) 10^{-7}$

donc $\ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7} \leqslant \dfrac{10^{-7}}{2}$

En notant que $\dfrac{10^{-7}}{2} = \dfrac{10 \times 10^{-8}}{2} = 5 \times 10^{-8}$, on a montré que $\ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7} \leqslant 5 \times 10^{-8}$. En utilisant à nouveau la croissance de la fonction ln et la propriété [LN1], on déduit de la partie gauche de l'encadrement définissant p, l'estimation $(p+1)\ln(1-10^{-7}) \leqslant \ln(0{,}99)$. La question 3 assure alors

$-10^{-7} - 10^{-13} \leqslant \ln(1-10^{-7})$ et $p+1 \geqslant 0$

donc $-(p+1)10^{-7} - (p+1)10^{-13} \leqslant (p+1)\ln(1-10^{-7})$

donc $-(p+1)10^{-7} - (p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99)$

donc $\left(\dfrac{2p+1}{2} - (p+1)\right) 10^{-7} - (p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7}$

donc $-\dfrac{10^{-7}}{2} - (p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7}$

En transformant l'écriture du premier terme du membre de gauche de l'estimation précédente comme dans le cadre du premier calcul, on a finalement montré que $-5 \times 10^{-8} - (p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7}$. En regroupant enfin les résultats des deux calculs de ce premier point, on obtient l'encadrement voulu, à savoir

$$-5 \times 10^{-8} - (p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99) + \frac{2p+1}{2}\,10^{-7} \leqslant -5 \times 10^{-8}$$

- Comme $(p+1)10^{-13} \geqslant 0$, on peut dégrader un peu l'encadrement obtenu dans le point précédent sous la forme

  $-5 \times 10^{-8} - (p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7} \leqslant 5 \times 10^{-8} + (p+1)10^{-13}$

  donc $\left|\ln(0{,}99) + \dfrac{2p+1}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 5 \times 10^{-8} + (p+1)10^{-13}$

  en utilisant la propriété (V4) de la valeur absolue. Or $p = 10^5 + 503$ donc $(p+1)10^{-13} = 10^{-8} + 5{,}03 \times 10^{-11}$. En particulier, il est clair que $(p+1)10^{-13} \leqslant 2 \times 10^{-8}$. On déduit alors de la dernière estimation que

$$\left|\ln(0{,}99) + \frac{2p+1}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7 \times 10^{-8}$$

5. Soit m et n deux entiers naturels plus petits que 69. On multiplie par n chaque membre de l'estimation prouvée dans la question 4 et par m chaque membre de l'estimation admise dans cette même question. En notant que m et n sont positifs, on obtient

$\left|n\ln(0{,}99) + \dfrac{n(2p+1)}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7n \times 10^{-8}$

et $\left|m\ln(0{,}9995) + \dfrac{m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7m \times 10^{-8}$

donc $\left|n\ln(0{,}99) + \dfrac{n(2p+1)}{2}\,10^{-7}\right| + \left|m\ln(0{,}9995) + \dfrac{m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7(n+m) \times 10^{-8}$

On utilise alors successivement l'inégalité triangulaire démontrée dans l'exercice 149 puis la propriété [LN1] de la fonction logarithme pour écrire

$\left|n\ln(0{,}99) + \dfrac{n(2p+1)}{2}\,10^{-7} + m\ln(0{,}99) + \dfrac{m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7(n+m) \times 10^{-8}$

donc $\left|\ln(0{,}99^n) + \ln(0{,}9995^m) + \dfrac{n(2p+1)}{2}\,10^{-7} + \dfrac{m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7(n+m) \times 10^{-8}$

donc $\left|\ln(0{,}99^n \times 0{,}9995^m) + \dfrac{n(2p+1) + m(2q+1)}{2}\,10^{-7}\right| \leqslant 7(n+m) \times 10^{-8}$

Or $7(m+n) \leqslant 7(69+69)$ et $7(69+69) = 966$. On en déduit que $7(m+n) \leqslant 1000$ donc $7(n+m) \times 10^{-8} \leqslant 10^{-5}$. En regroupant cette estimation et la précédente, on obtient

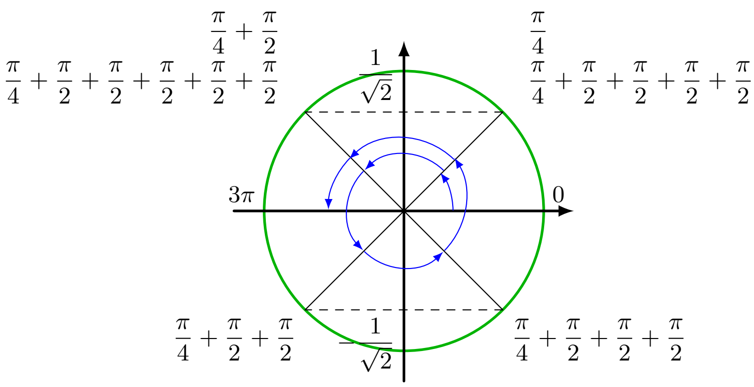
$$\left|\,\ln(0{,}9995^m \times 0{,}99^n) + 5\big(m(2q+1) + n(2p+1)\big)10^{-8}\right| \leqslant 10^{-5}$$

Correction de l'exercice 168

- Soit t un réel appartenant à $[0\,;3\pi]$. On sait que

$$\begin{aligned} & \big(\cos(t)\big)^2 = 1 - \big(\sin(t)\big)^2 \\ \text{donc} \quad & \big(\cos(t)\big)^2 + 3\big(\sin(t)\big)^2 - 2 = 2\big(\sin(t)\big)^2 - 1 \end{aligned}$$

Les réels cherchés sont donc les réels t appartenant à $[0\,;3\pi]$ tel que $\big|\sin(t)\big| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est à dire les réels appartenant à $[0\,;3\pi]$ dont le sinus vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On peut à présent travailler sur un cercle trigonométrique comme expliqué dans les indications de l'exercice 43. L'étude est résumée sur le schéma ci-dessous.



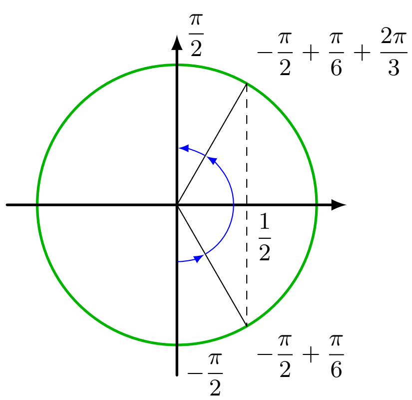
L'ensemble des réels cherchés est donc $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 169

- On travaille en premier lieu par **conditions nécessaires**. Soit donc t un réel appartenant à $]-\pi/2\,;\pi/2[$ vérifiant la relation $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \sqrt{3}$. On note que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2 = 3 \\ \text{donc} \quad & \big(\sin(t)\big)^2 - 3\big(\cos(t)\big)^2 = 0 \\ \text{Or} \quad & \big(\sin(t)\big)^2 = 1 - \big(\cos(t)\big)^2 \\ \text{donc} \quad & \big(\cos(t)\big)^2 = \frac{1}{4} \\ \text{donc} \quad & \big|\cos(t)\big| = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comme $\cos(t) > 0$ on sait que $\cos(t) = \dfrac{1}{2}$. On peut à présent travailler sur un cercle trigonométrique comme expliqué dans les indications de l'exercice 43. L'étude est résumée sur le schéma ci-dessous.



Finalement $t \in \left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$. Réciproquement, seul $\dfrac{\pi}{3}$ vérifie la relation initiale. Finalement, $\dfrac{\pi}{3}$ est le seul réel appartenant à $]-\pi/2\,;\pi/2[$ tel que $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 170

- Proposons deux méthodes de résolution, La première consiste à travailler par **condition nécessaires** avant de faire une réciproque. Soit donc t un réel appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin(t)-\cos(t)=\sqrt{2}$. On note que

$$\begin{array}{ll} & \big(\sin(t)-\cos(t)\big)^2=2 \\ \text{donc} & \big(\sin(t)\big)^2+\big(\cos(t)\big)^2-2\sin(t)\cos(t)=2 \\ \text{Or} & \big(\sin(t)\big)^2+\big(\cos(t)\big)^2=1 \text{ et } 2\sin(t)\cos(t)=\sin(2t) \\ \text{donc} & 1-\sin(2t)=2 \\ \text{donc} & \sin(2t)=-1 \end{array}$$

Les réels dont le sinus est -1 sont ceux qui sont congrus à $\dfrac{3\pi}{2}$ modulo 2π. Comme $2t$ appartient à $[0\,;4\pi]$, les réels cherchés sont ceux dont le double est $\dfrac{3\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}+2\pi$. Finalement t est nécessairement égal à $\dfrac{3\pi}{4}$ ou $\dfrac{7\pi}{4}$. Réciproquement, seul $\dfrac{3\pi}{4}$ vérifie la relation initiale donc $\dfrac{3\pi}{4}$ est le seul réel appartenant à $[0\,;2\pi]$ tel que $\sin(t)-\cos(t)=\sqrt{2}$.

- La deuxième solution est fondée sur une astuce reposant sur une des formules [T14] à [T17]. Elle permet de raisonner par **conditions nécessaires et suffisantes**. Soit t un réel appartenant à $[0\,;2\pi]$. On note que

$$\cos(t)-\sin(t)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\cos(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sin(t)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(t)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(t)\right)=\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Les réels cherchés sont donc les réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, c'est à dire les réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $t+\dfrac{\pi}{4}$ soit congru à 0 modulo 2π. on retrouve donc bien que $\dfrac{3\pi}{4}$ est le seul réel appartenant à $[0\,;2\pi]$ tel que $\sin(t)-\cos(t)=\sqrt{2}$.

L'astuce présentée dans la deuxième solution est très souvent utilisée en physique. En effet dans beaucoup de situations, la réponse d'un système excité par une grandeur qui évolue dans le temps de manière sinusoïdale, est elle-même sinusoïdale. On alimente par exemple un circuit électrique uniquement construit avec des résistances, des condensateurs et des bobines par une source de tension dont la force électromotrice est une fonction du temps de la forme $U:t\mapsto U_m\cos(\omega t)$ où U_m et ω sont deux réels strictement positifs. On peut alors calculer la tension aux bornes d'un dipôle quelconque du circuit, qui est de la forme $V:t\mapsto A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ où A et B sont deux constantes qui ne dépendent que du circuit considéré. Les calculs usuels, que vous étudierez en mathématique en sup, conduisent à la forme précédente de V. Mais cette forme ne convient pas aux physiciens car les grandeurs A et B n'ont pas de sens physique clair si aucune des deux n'est nulle. Heureusement, dans ce cas, on peut généraliser l'astuce vue dans l'exercice qui précède. Ainsi, pour tout réel t,

$$V(t)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\times\cos(\omega t)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\times\sin(\omega t)\right)$$

Comme la somme des carrés de $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $-\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ vaut 1, il existe $\theta\in[0\,;2\pi[$ tel que

$$\cos(\theta)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\quad\text{et}\quad\sin(\theta)=-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

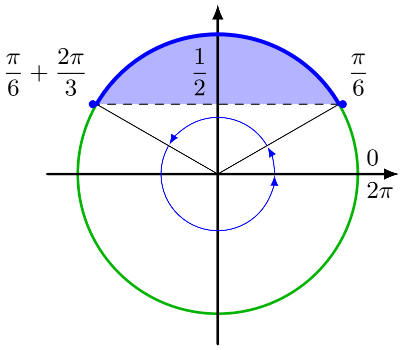
On note alors que pour tout réel t, $V(t)=\sqrt{A^2+B^2}\big(\cos(\omega t)\cos(\theta)-\sin(\omega t)\sin(\theta)\big)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+\theta)$. Cette écriture est bien plus utile pour le physicien qui donne un sens aux réels $\sqrt{A^2+B^2}$ et θ, comme vous le verrez dans votre cours de physique de sup.

Correction de l'exercice 171

- Soit $x\in[0\,;2\pi]$. On utilise la formule [T20] pour écrire que $\sin(x)-\cos(2x)=2\big(\sin(x)\big)^2+\sin(x)-1$. On est en présence d'une **expression polynomiale** du deuxième degré «en $\sin(x)$» dont on veut étudier le signe. Il suffit donc de factoriser cette expression. Notez que la fonction $f:t\mapsto 2t^2+t-1$ prend la valeur 0 en -1. La technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16, nous permet de trouver le deuxième point d'annulation f, à savoir $1/2$. Finalement,

$$\sin(x)-\cos(2x)=2\big(\sin(x)+1\big)\left(\sin(x)-\frac{1}{2}\right)$$

Comme la fonction sinus ne prend que des valeurs dans $[-1\,;1]$, on sait que $\sin(x)+1 \geqslant 0$. L'ensemble des réels cherché est donc la réunion de l'ensemble $\mathcal{A}$ des réels appartenant à $[0\,;2\pi]$ en lesquels sinus prend la valeur -1 et de l'ensemble $\mathcal{B}$ des réels appartenant à $[0\,;2\pi]$ dont le sinus est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$. Le cours assure que $\mathcal{A}$ ne contient que $\dfrac{3\pi}{2}$. Pour déterminer $\mathcal{B}$, on peut travailler sur un cercle trigonométrique comme expliqué dans les indications de l'exercice 43. L'étude est résumée sur le schéma ci-dessous.



La lecture graphique du schéma précédent assure que $\mathcal{B} = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$. L'ensemble des réels x appartenant à $[0\,;2\pi]$ tel que $\sin(x) \geqslant \cos(2x)$ est donc $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Correction de l'exercice 172

- Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Précédons par **récurrence**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'assertion

$$H_n : \ \cos\left(\frac{x}{2^0}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^1}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

La formule [T21] assure que $\dfrac{\sin(2x)}{2^{0+1}\sin\left(\frac{x}{2^0}\right)} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{2\sin(x)} = \cos(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2^0}\right)$.

Donc l'assertion H_0 est vraie. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie. On utilise à nouveau la formule [T21] et les relations usuelles sur les puissances pour écrire

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

donc $$\frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin(2x)}{2^{n+2}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

donc $$\frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+2}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

donc $$\cos\left(\frac{x}{2^0}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^1}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+2}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

en utilisant la véracité de l'assertion H_n. L'assertion H_{n+1} est donc vraie et le principe de récurrence assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\left(\frac{x}{2^0}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^1}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Correction de l'exercice 173

1. On utilise la formule [M1] et l'identité remarquable [IR3] pour développer chaque carré.

$$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')\big(\overline{z}+\overline{z'}\big) = z\,\overline{z} + z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z} + z'\,\overline{z'} = |z|^2 + z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z} + |z'|^2$$

et $$\big(|z|+|z'|\big)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

donc $$|z+z'|^2 - \big(|z|+|z'|\big)^2 = z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z} - 2|z||z'|$$

Or $z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z} = \overline{\overline{z}\,z'} + z'\,\overline{z} = 2\mathrm{Re}(\overline{z}\,z')$ d'après la formule [C9]. En exploitant alors les formules [M3] et [M4], on note aussi que $2|z||z'| = 2|\overline{z}||z'| = 2|\overline{z}\,z'|$. Finalement, on obtient $|z+z'|^2 - \big(|z|+|z'|\big)^2 = 2\big(\mathrm{Re}(\overline{z}\,z') - |\overline{z}\,z'|\big)$.

2. Vous trouverez des exemples de preuves d'identités qui sont des inégalités dans la cinquième leçon et en relisant les corrigés des exercices 25, 26 et 53. La méthode de base consiste à fixer les variables puis à factoriser l'expression obtenue en plaçant tous les termes de l'identité du même coté du signe de comparaison. Dans notre cas, afin de faire «disparaître» les racines carrées, on compare les carrés des réels manipulés. Soit donc u un complexe. La définition du module d'un complexe assure que

$$\begin{aligned} & |u|^2 - \big(\mathrm{Re}(u)\big)^2 = \Big(\big(\mathrm{Re}(u)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(u)\big)^2\Big) - \big(\mathrm{Re}(u)\big)^2 = \big(\mathrm{Im}(u)\big)^2 \\ \text{donc} \quad & |u|^2 - \big(\mathrm{Re}(u)\big)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

puisque le carré d'un réel est toujours positif. Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \sqrt{|u|^2} \geqslant \sqrt{\big(\mathrm{Re}(u)\big)^2} \\ \text{donc} \quad & |u| \geqslant \big|\mathrm{Re}(u)\big| \end{aligned}$$

Ne pas oublier les valeurs absolues autour de la partie réelle de u, qui n'est pas nécessairement un réel positif. Mais on sait que la valeur absolue d'un réel est toujours supérieure au réel considéré. On en déduit bien que pour tout complexe u, $|u| \geqslant \mathrm{Re}(u)$

3. En appliquant la formule de la question 2 au complexe $\overline{z}\,z'$, on sait que $\mathrm{Re}(\overline{z}\,z') - |\overline{z}\,z'| \leqslant 0$. La question 1 assure alors que $|z+z'|^2 - \big(|z|+|z'|\big)^2 \leqslant 0$ donc $|z+z'|^2 \leqslant \big(|z|+|z'|\big)^2$. En utilisant encore une fois la croissance de la racine carrée et en notant que dans notre cas on ne manipule que des réels positifs, on obtient finalement le résultat voulu, à savoir $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.

Correction de l'exercice 174

1. On note que $\mathrm{Re}(v) = \mathrm{Re}\big(z+|z|\big) = \mathrm{Re}(z) + |z|$ puisque $|z|$ est réel. Or par définition de z,

$$\begin{aligned} & |z|^2 = \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2 \\ \text{donc} \quad & |z|^2 - \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 = \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2 \\ \text{donc} \quad & |z|^2 \geqslant \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 \end{aligned}$$

puisque le carré d'un réel est toujours positif. On exploite alors la croissance de la racine carrée puis le fait que la valeur absolue d'un réel est toujours plus grande que l'opposé du réel considéré pour écrire

$$\begin{aligned} & \sqrt{|z|^2} \geqslant \sqrt{\big(\mathrm{Re}(z)\big)^2} \\ \text{donc} \quad & |z| \geqslant \big|\mathrm{Re}(z)\big| \\ \text{donc} \quad & |z| \geqslant -\mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

Finalement $\mathrm{Re}(v) \geqslant 0$. Supposons à présent que $\mathrm{Re}(v) = 0$. On en déduit que $\mathrm{Re}(z) = -|z|$. D'une part il s'ensuit que $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$. D'autre part, en élevant l'identité au carré et en exploitant à nouveau la définition du module d'un complexe, on note que $\big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 = \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2$ donc $\mathrm{Im}(z) = 0$. Finalement si on suppose que $\mathrm{Re}(v) = 0$ alors z est un réel négatif. Comme l'énoncé écarte ce cas, on sait que $\mathrm{Re}(v) \neq 0$ et on a bien montré que $\mathrm{Re}(v) > 0$

2. Comme $|z|$ est réel, il est son propre conjugué. On en déduit

$$\begin{aligned} & 2\mathrm{Re}(v) = v + \overline{v} = z + |z| + \overline{z+|z|} = z + \overline{z} + 2|z| \\ \text{donc} \quad & w^2 = \left(\frac{v}{\sqrt{2\mathrm{Re}(v)}}\right)^2 = \frac{\big(z+|z|\big)^2}{2\mathrm{Re}(v)} = \frac{z^2 + z\overline{z} + 2z|z|}{z+\overline{z}+2|z|} = \frac{z\big(z+\overline{z}+2|z|\big)}{z+\overline{z}+2|z|} = z \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 175

1. On note que $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{i}$

2. On relira les indications et le corrigé de l'exercice 58 pour connaître les complexes écrits sous forme algébrique dont la forme trigonométrique est connue, et savoir optimiser les calculs d'expressions algébriques mettant en jeu des complexes en fonction de la forme de l'écriture de ces derniers. Dans notre cas, la forme trigonométrique de z_1 et z_2 est connue et est adaptée au calcul de quotient.

$$\begin{aligned} & z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \\ \text{et} \quad & z' = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \\ \text{donc} \quad & \frac{z'}{z} = \frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} = \sqrt{2}\,\exp\left(\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} \end{aligned}$$

3 • La question précédente assure que $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{i}$.

L'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe permet d'**identifier** partie réelle et partie imaginaire dans la relation précédente. On obtient ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Correction de l'exercice 176

1 • On relira les indications et le corrigé de l'exercice 58 pour connaître les complexes écrits sous forme algébrique dont la forme trigonométrique est connue, et savoir optimiser les calculs d'expressions algébriques mettant en jeu des complexes en fonction de la forme de l'écriture de ces derniers. Comme la forme trigonométrique de $1+\mathrm{i}$ est connue et comme cette forme est adaptée au calcul de puissances de complexes, on est tenté de mener le calcul comme suit.

$$\begin{aligned}
& 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\\
\text{donc}\quad & (1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}\\
\text{donc}\quad & (1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right)
\end{aligned}$$

Il reste à distinguer plusieurs cas suivant le reste de la division euclidienne de n par 4. On note ainsi que pour tout entier naturel p,

$$\begin{aligned}
& (1+\mathrm{i})^{4p} = \left(\sqrt{2}\right)^{4p}\left(\cos\left(\frac{4p\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{4p\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right) = \left(\left(\sqrt{2}\right)^4\right)^p\left(\cos(p\pi) + \sin(p\pi)\,\mathrm{i}\right) = 4^p\left((-1)^p + 0\times\mathrm{i}\right) = (-4)^p\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{4p+1}\left(\cos\left(\frac{(4p+1)\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{(4p+1)\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right)\\
& \qquad = \sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}\right)^4\right)^p\left(\cos\left(p\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right)\\
& \qquad = \sqrt{2}\,4^p\left((-1)^p\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + (-1)^p\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\,(-4)^p\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\\
\text{donc}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+1} = (-4)^p(1+\mathrm{i})\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+2} = \left(\sqrt{2}\right)^{4p+2}\left(\cos\left(\frac{(4p+2)\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{(4p+2)\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right)\\
& \qquad = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(\left(\sqrt{2}\right)^4\right)^p\left(\cos\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}\right)\\
& \qquad = 2\times 4^p\left((-1)^p\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-1)^p\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}\right)\\
\text{donc}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+2} = 2(-4)^p\,\mathrm{i}\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+3} = \left(\sqrt{2}\right)^{4p+3}\left(\cos\left(\frac{(4p+3)\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{(4p+3)\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right)\\
& \qquad = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\left(\sqrt{2}\right)^4\right)^p\left(\cos\left(p\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(p\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right)\\
& \qquad = 2\sqrt{2}\,4^p\left((-1)^p\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + (-1)^p\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\,(-4)^p\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\\
\text{donc}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+3} = 2(-4)^p(-1+\mathrm{i})
\end{aligned}$$

• Le calcul qui précède est très laborieux. Il aurait été bien plus efficace de remarquer que $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$. On note alors que pour tout entier naturel p,

$$\begin{aligned}
& (1+\mathrm{i})^{4p} = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^{2p} = (2\mathrm{i})^{2p} = \left((2\mathrm{i})^2\right)^p = (-4)^p\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+1} = (1+\mathrm{i})^{4p}\times(1+\mathrm{i}) = (-4)^p(1+\mathrm{i})\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+2} = (1+\mathrm{i})^{4p}\times(1+\mathrm{i})^2 = 2(-4)^p\mathrm{i}\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{4p+3} = (1+\mathrm{i})^{4p}\times(1+\mathrm{i})^2\times(1+\mathrm{i}) = (-4)^p\times 2\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i}) = 2(-4)^p(-1+\mathrm{i})
\end{aligned}$$

2 • On gère cette question comme dans la deuxième correction proposée pour la première question en notant que

$$(1+\mathrm{i})^{-n} = \left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^n = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\right)^n = \frac{(1-\mathrm{i})^n}{2^n}$$

Comme $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$, pour tout entier naturel p,

$$\begin{aligned}
& (1+\mathrm{i})^{-4p} = \frac{\left((1-\mathrm{i})^2\right)^{2p}}{2^{4p}} = \frac{(-2\mathrm{i})^{2p}}{2^{4p}} = \frac{(-1)^{2p}\times 2^{2p}\times(\mathrm{i}^2)^p}{2^{4p}} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} = \frac{1}{(-4)^p}\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{-4p-1} = (1+\mathrm{i})^{-4(p+1)}\times(1+\mathrm{i})^3 = \frac{2(-1+\mathrm{i})}{(-4)^{p+1}}\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{-4p-2} = (1+\mathrm{i})^{-4(p+1)}\times(1+\mathrm{i})^2 = \frac{2\mathrm{i}}{(-4)^{p+1}}\\
\text{et}\quad & (1+\mathrm{i})^{-4p-3} = (1+\mathrm{i})^{-4(p+1)}\times(1+\mathrm{i}) = \frac{1+\mathrm{i}}{(-4)^{p+1}}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 177

1 • Soit t un réel. Par définition de la forme trigonométrique d'un complexe, on sait que $\cos(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. L'usage des formules [C9] et [EC3] assure alors que pour tout réel t,

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$$

La propriété [EC2] assure alors que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\theta')/2}\big)$$

donc $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}$

en utilisant la première identité pour le réel $\theta - \theta'$. On prendra garde au fait que la forme finale n'est pas nécessairement la forme trigonométrique du complexe manipulé puisque le signe du facteur en cosinus n'est pas connu.

2 • Soit t un réel. Par définition de la forme trigonométrique d'un complexe, on sait que $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. L'usage des formules [C10] et [EC3] assure alors que pour tout réel t,

$$\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

La propriété [EC2] assure alors que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\theta')/2}\big)$$

donc $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = 2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')/2} = 2\sin\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta'+\pi)/2}$

en utilisant la première identité pour le réel $\theta - \theta'$ et le fait que la forme trigonométrique de i est $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$. On prendra encore garde au fait que la forme finale n'est pas nécessairement la forme trigonométrique du complexe manipulé puisque le signe du facteur en sinus n'est pas connu.

3 • On relira les indications et le corrigé de l'exercice 58 pour connaître les complexes écrits sous forme algébrique dont la forme trigonométrique est connue et savoir optimiser les calculs d'expressions algébriques mettant en jeu des complexes en fonction de l'écriture de ces derniers. C'est ainsi que dans le deuxième exemple, on calcule le cube du deuxième terme avant de «regrouper» les exponentielles alors que dans le dernier exemple, l'élévation au cube est la dernière opération puisqu'elle est élémentaire sur une forme exponentielle. Grâce aux deux premières questions, on est enfin capable de gérer la somme de deux complexes écrits sous forme exponentielle si ces derniers ont même module, ce que l'on fait de manière systématique dans chacun des exemples suivants.

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

et $\quad 1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = -2\sin\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta+\pi)/2}$

et $\quad \mathrm{i} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi-2\theta}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+\pi)/4} = 2\sin\left(\dfrac{\pi-2\theta}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+3\pi)/4}$

donc $\quad \left(\mathrm{i} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 = 8\left(\sin\left(\dfrac{\pi-2\theta}{4}\right)\right)^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}(2\theta+3\pi)/4}$

Correction de l'exercice 178

1 • Par choix de z,

$$z^2 + \overline{z}^2 + z^3 = 0$$

donc $\quad \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + \overline{\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2} + \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 = 0$

donc $\quad r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + r^2\overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} + r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = 0$

donc $\quad r^2\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} + r\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\big) = 0$

On on a supposé que $r > 0$. On peut donc simplifier par r pour obtenir

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} + r\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = 0$$

Or $\quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} = \cos(2\theta) + \mathrm{i}\sin(2\theta) + \cos(2\theta) - \mathrm{i}\sin(2\theta) = 2\cos(2\theta)$

donc $\quad 2\cos(2\theta) + r\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = 0$

2 • La question précédente assure que $e^{3i\theta} = -\dfrac{2\cos(2\theta)}{r}$.

En particulier cette exponentielle est réelle, ce qui assure que le sinus de 3θ est nul. Comme 3θ appartient à $[-3\pi\,;3\pi[$, la connaissance des points d'annulation de la fonction sinus nous assure que 3θ est un des réels de l'ensemble $\{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$. Autrement dit, le réel θ appartient à l'ensemble

$$\left\{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

3 • Comme $r = -2\cos(2\theta)e^{-3i\theta}$, on peut calculer la valeur de r pour chaque valeur possible de θ. On calcule ainsi

- si $\theta = -\pi$ alors $r = -2\cos(-2\pi)e^{-3i\pi} = 2$
- si $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$ alors $r = -2\cos\left(2 \times \left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\exp\left(3 \times \left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)i\right) = -2\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)e^{-2i\pi} = 1$
- si $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ alors $r = -2\cos\left(2 \times \left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\exp\left(3 \times \left(-\dfrac{\pi}{3}\right)i\right) = -2\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)e^{-i\pi} = 1 = -1$
- si $\theta = 0$ alors $r = -2\cos(0)e^{0i} = -2$
- si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ alors $r = -2\cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{3}\right)\exp\left(3 \times \dfrac{\pi}{3}i\right) = -2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)e^{i\pi} = 1 = -1$
- si $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ alors $r = -2\cos\left(2 \times \dfrac{2\pi}{3}\right)\exp\left(3 \times \dfrac{2\pi}{3}i\right) = -2\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)e^{2i\pi} = 1$

Sachant de plus que $r > 0$ par construction, cela permet d'écarter quelques valeurs potentielles de θ. En effet, seules la première, la deuxième et la dernière valeur de θ sont possibles. Comme on a calculé les valeurs de r correspondant à ces valeurs de θ, on a bien montré que z appartient à $\{-2, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\}$.

4 • Réciproquement, on note que

$$\begin{array}{ll} & (-2)^2 + \overline{-2}^2 + (-2)^3 = 4 + 4 - 8 = 0 \\ \text{et} & \left(e^{2i\pi/3}\right)^2 + \overline{\left(e^{2i\pi/3}\right)^2} + \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{4i\pi/3} + e^{-4i\pi/3} + e^{2i\pi} = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + 1 = 0 \\ \text{et} & \left(e^{-2i\pi/3}\right)^2 + \overline{\left(e^{-2i\pi/3}\right)^2} + \left(e^{-2i\pi/3}\right)^3 = e^{-4i\pi/3} + e^{4i\pi/3} + e^{-2i\pi} = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + 1 = 0 \end{array}$$

Finalement, l'ensemble des complexes z non nuls vérifiant $z^2 + \overline{z}^2 + z^3 = 0$ est $\{-2, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\}$.

Correction de l'exercice 179

1 • On suppose que x est une solution de (E). Par construction,

$$\begin{array}{ll} & x^3 - px - q = 0 \\ \text{donc} & \left(u + \dfrac{p}{3u}\right)^3 - p\left(u + \dfrac{p}{3u}\right) - q = 0 \\ \text{donc} & u^3 + 3 \times u^2 \times \dfrac{p}{3u} + 3u \times \left(\dfrac{p}{3u}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3u}\right)^3 - p\left(u + \dfrac{p}{3u}\right) - q = 0 \end{array}$$

en utilisant la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le cube de la somme de deux nombres.

$$\begin{array}{ll} \text{donc} & u^3 + pu + \dfrac{p^2}{3u} + \dfrac{p^3}{27u^3} - pu - \dfrac{p^2}{3u} - q = 0 \\ \text{donc} & u^3 - q + \dfrac{p^3}{27u^3} = 0 \\ \text{donc} & (u^3)^2 - qu^3 + \dfrac{p^3}{27} = 0 \end{array}$$

en multipliant chaque membre de la relation par u^3.

2 • On note que $j = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)i = e^{2i\pi/3}$.

• Comme $j = e^{2i\pi/3}$, $j^2 = e^{4i\pi/3}$. Il est alors clair que les nombres 1, j et j^2 sont deux à deux distincts. Il s'ensuit que si a est un complexe non nul, les complexes a, aj et aj^2 sont deux à deux distincts. On note enfin que

$$\begin{array}{ll} & (aj)^3 = \left(ae^{2i\pi/3}\right)^3 = a^3\left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = a^3e^{2i\pi} = a^3 \\ \text{et} & (aj^2)^3 = \left(ae^{4i\pi/3}\right)^3 = a^3\left(e^{4i\pi/3}\right)^3 = a^3e^{4i\pi} = a^3 \end{array}$$

Les trois complexes a, aj et aj^2 ont donc le même cube.

3 • Dans cette question l'équation (F) est $y^2-9y+8=0$ d'inconnue complexe y. Notez que la fonction $f : y \mapsto y^2-9y+8$ prend la valeur 0 en 1. La technique présentée dans la remarque précédant l'exercice 13 et exploitée dans cet exercice et dans l'exercice 16, nous permet de trouver le deuxième point d'annulation f, à savoir 8. Finalement, les solutions de (F) sont 1 et 8.

• On note que 1 est un complexe de cube 1. On connaît donc deux autres complexes de cube 1, à savoir j et j^2. En suivant l'algorithme présenté, on pose alors

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 + \dfrac{p}{3} = 3 \\[2mm] x_2 = \mathrm{j} + \dfrac{p}{3\mathrm{j}} = \mathrm{j} + \dfrac{2}{\mathrm{j}} = \mathrm{j} + \dfrac{2\mathrm{j}^2}{\mathrm{j}^3} = \mathrm{j} + 2\mathrm{j}^2 \\[2mm] x_3 = \mathrm{j}^2 + \dfrac{p}{3\mathrm{j}^2} = \mathrm{j}^2 + \dfrac{2}{\mathrm{j}^2} = \mathrm{j}^2 + \dfrac{2\mathrm{j}}{3\mathrm{j}^3} = \mathrm{j}^2 + 2\mathrm{j} \end{array}\right.$$

On a optimisé le calcul des inverses mis en jeu en notant que l'inverse de j est j^2 puisque $\mathrm{j}^2 \times \mathrm{j} = \mathrm{j}^3 = 1$. Réciproquement, on vérifie, en utilisant à nouveau la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le cube de la somme de deux nombres, que

$$x_1^3 - 6x_1 - 9 = 3^3 - 6 \times 3 - 9 = 0$$

et
$$\begin{aligned} x_2^3 - 6x_2 - 9 &= (\mathrm{j} + 2\mathrm{j}^2)^3 - 6(\mathrm{j} + 2\mathrm{j}^2) - 9 \\ &= \mathrm{j}^3 + 3\mathrm{j}^2 \times 2\mathrm{j}^2 + 3\mathrm{j}(2\mathrm{j}^2)^2 + (2\mathrm{j}^2)^3 - 6\mathrm{j} - 12\mathrm{j}^2 - 9 \\ &= \mathrm{j}^3 + 6\mathrm{j}^4 + 12\mathrm{j}^5 + 8\mathrm{j}^6 - 6\mathrm{j} - 12\mathrm{j}^2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{j}^3=1$, $\mathrm{j}^4=\mathrm{j}$, $\mathrm{j}^5=\mathrm{j}^2$ et $\mathrm{j}^6=1$. On peut faire un calcul analogue pour vérifier que $x_3^3-6x_3-9=0$ ou noter que x_3 est le conjugué de x_2 et «conjuguer» la relation qui vient juste d'être prouvée. Finalement, les complexes x_1, x_2 et x_3 sont bien des solutions de (E). On montrera en sup que l'équation (E) a au plus trois solutions. Comme les solutions trouvées sont deux à deux distinctes, on pourra alors assure que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{3, \mathrm{j}+2\mathrm{j}^2, \mathrm{j}^2+2\mathrm{j}\}$, que l'on peut écrire aussi $\left\{3, -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}, -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right\}$.

4 • On note que $51 = 3 \times 17$. Dans cette question l'équation (F) est donc $y^2 - 104y + 17^3 = 0$ d'inconnue complexe y. Le discriminant de (F) est $104^2 - 4 \times 17^3$, c'est à dire -94^2. Les solutions de (F) sont donc $52+47\mathrm{i}$ et $52-47\mathrm{i}$.

• On utilise encore une fois la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le cube de la somme de deux nombres. On note alors que

$$(4+\mathrm{i})^3 = 4^3 + 3 \times 4^2\mathrm{i} + 3 \times 4\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 64 + 48\mathrm{i} - 12 - \mathrm{i} = 52 + 47\mathrm{i}$$

Le nombre $4+\mathrm{i}$ admet donc comme cube une des solutions de (F). La question 2 assure alors que $(4+\mathrm{i})\mathrm{j}$ et $(4+\mathrm{i})\mathrm{j}^2$ sont deux autres complexes admettant le même cube. En suivant l'algorithme présenté, on pose alors

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 4 + \mathrm{i} + \dfrac{p}{3(4+\mathrm{i})} = 4 + \mathrm{i} + \dfrac{17(4-\mathrm{i})}{(4+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})} = 4 + \mathrm{i} + \dfrac{17(4-\mathrm{i})}{17} = 8 \\[2mm] x_2 = (4+\mathrm{i})\mathrm{j} + \dfrac{p}{3(4+\mathrm{i})\mathrm{j}} = (4+\mathrm{i})\mathrm{j} + \dfrac{17(4-\mathrm{i})\mathrm{j}^2}{(4+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})\mathrm{j}^3} = (4+\mathrm{i})\mathrm{j} + (4-\mathrm{i})\mathrm{j}^2 \\[2mm] x_3 = (4+\mathrm{i})\mathrm{j}^2 + \dfrac{p}{3(4+\mathrm{i})\mathrm{j}^2} = (4+\mathrm{i})\mathrm{j}^2 + \dfrac{17(4-\mathrm{i})\mathrm{j}}{(4+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})\mathrm{j}^3} = (4+\mathrm{i})\mathrm{j}^2 + (4-\mathrm{i})\mathrm{j} \end{array}\right.$$

Comme j et j^2 sont conjugués, x_2 et x_3 apparaissent comme la somme de deux complexes conjugués. Ces deux nombres sont donc des réels, chacun étant égal au double de la partie réelle du premier terme de la somme les définissant d'après la formule [C9]. On note ainsi que $x_2 = 2\mathrm{Re}\big((4+\mathrm{i})\mathrm{j}\big)$, que l'on calcule en utilisant la forme algébrique explicite de j, ce qui donne $x_2 = -4-\sqrt{3}$. On vérifie de même que $x_3 = -4+\sqrt{3}$. Réciproquement, en utilisant pour la dernière fois la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le cube de la somme de deux nombres,

$$x_1^3 - 51x_1 - 104 = 8^3 - 51 \times 8 - 104 = 0$$

et
$$\begin{aligned} x_2^3 - 51x_2 - 104 &= (-4-\sqrt{3})^3 - 51(-4-\sqrt{3}) - 104 \\ &= (-4)^3 + 3(-4)^2(-\sqrt{3}) + 3(-4)(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^3 + 204 + 51\sqrt{3} - 104 \\ &= -64 - 48\sqrt{3} - 36 - 3\sqrt{3} + 204 + 51\sqrt{3} - 104 = 0 \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} x_3^3 - 51x_3 - 104 &= (-4+\sqrt{3})^3 - 51(-4+\sqrt{3}) - 104 \\ &= (-4)^3 + 3(-4)^2\sqrt{3} + 3(-4)(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 + 204 - 51\sqrt{3} - 104 \\ &= -64 + 48\sqrt{3} - 36 + 3\sqrt{3} + 204 - 51\sqrt{3} - 104 = 0 \end{aligned}$$

Finalement, les complexes x_1, x_2 et x_3 sont bien des solutions de (E). On montrera en sup que l'équation (E) a au plus trois solutions. Comme les solutions trouvées sont deux à deux distinctes, on pourra alors assure que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{8, -4-\sqrt{3}, -4+\sqrt{3}\}$.

On montrera en sup que si x_0 est un point d'annulation d'une fonction polynomiale P de degré 3, alors on peut trouver une fonction polynomiale Q de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. Cette remarque permet d'éviter les calculs laborieux des questions 3 et 4 de l'exercice précédent. Par exemple dans la question 3, on a trouvé presque sans calcul que 8 est une solution de l'équation $x^3 - 51x - 104 = 0$ d'inconnue complexe x. On sait donc que l'on peut trouver trois complexes a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x^3 - 51x - 104 = (x-8)(ax^2 + bx + c)$. En effectuant un développement «de tête» de l'expression de droite dans l'identité précédente et en considérant le terme en x^3 et le terme constant de ce développement, on note que nécessairement $a = 1$ et $-8c = -104$ donc $c = 13$. On sait à présent que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x^3 - 51x - 104 = (x-8)(x^2 + bx + 13)$. On calcule alors «de tête» le terme en x^2 du même développement et on note que $b - 8 = 0$ soit $b = 8$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x^3 - 51x - 104 = (x-8)(x^2 + 8x + 13)$. Il est alors facile de déterminer les solutions de l'équation initiale par équivalences en cherchant les solutions de l'équation $x^2 + 8x + 13 = 0$ d'inconnue complexe x. Notez que les calculs sont beaucoup plus simples et que l'on peut travailler par **conditions nécessaires et suffisantes** ce qui évite la très lourde réciproque.

Correction de l'exercice 180

- Soit $n \in \mathbb{N}$. L'usage successif des formules [ER1] et [S5] permet d'écrire

$$\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^{-k}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \exp\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \exp\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Comme la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^{-k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^2.

Correction de l'exercice 181

1. La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

   On note que la fonction f' ne prend que des valeurs positives sur l'intervalle $]0\,;1]$. Il s'ensuit que la fonction f est croissante sur $]0\,;1]$. Donc pour tout $x \in]0\,;1]$, $f(x) \leqslant f(1)$. De manière analogue, la fonction f' ne prend que des valeurs négatives sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant f(1)$. Finalement f est majorée par $f(1)$. Comme $f(1) = 0$, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) \leqslant 0$. En exploitant l'expression explicite de f, on a bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note que $1 + \dfrac{1}{p}$ est un réel strictement positif. On peut donc exploiter la formule prouvée dans la première question. Ainsi

$$\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{p}\right) - 1 \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p} \quad \text{donc} \quad \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

   en utilisant la formule [LN2]. De même, on note que $1 - \dfrac{1}{p+1}$ est un réel strictement positif. On peut donc aussi exploiter la formule prouvée dans la première question. On calcule de même en achevant encore les transformations à l'aide de la formule [LN2],

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) - 1 \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{p}{p+1}\right) \leqslant -\frac{1}{p+1} \quad \text{donc} \quad \ln(p) - \ln(p+1) \leqslant -\frac{1}{p+1}$$

   En multipliant chaque membre de cette dernière estimation par -1 et en la regroupant avec la première estimation prouvée, on a finalement montré que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La question précédente assure que pour tout entier p compris entre 1 et $n-1$, $\ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \dfrac{1}{p}$. On effectue la somme de ces $n-1$ estimations et on obtient

$$\big(\ln(2) - \ln(1)\big) + \big(\ln(3) - \ln(2)\big) + \cdots + \big(\ln(n-1) - \ln(n-2)\big) + \big(\ln(n) - \ln(n-1)\big) \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

   donc $\quad \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-2} + \dfrac{1}{n-1}$

en notant que le premier terme de chaque parenthèse du membre de gauche de l'estimation obtenue se simplifie avec le deuxième terme de la parenthèse suivante. On remarque alors que le membre de droite de l'estimation est u_{n-1}. Il suffit donc d'ajouter $1/n$ de chaque coté de l'inégalité pour obtenir

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n} \leqslant u_n - \ln(n)$$

La première question assure aussi que pour tout entier p compris entre 1 et $n-1$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p)$. Comme précédemment, on effectue la somme de ces $n-1$ estimations et on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n} \leqslant \big(\ln(2) - \ln(1)\big) + \big(\ln(3) - \ln(2)\big) + \cdots + \big(\ln(n-1) - \ln(n-2)\big) + \big(\ln(n) - \ln(n-1)\big) \\
\text{donc} \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n} \leqslant \ln(n) \\
\text{donc} \quad & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n} - \ln(n) \leqslant 1
\end{aligned}$$

en simplifiant les sommes comme dans le premier calcul. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n - \ln(n) \leqslant 1$.

4 • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $v_n = u_n - \ln(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - \big(u_n - \ln(n)\big) = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

Le résultat de la question 2 assure alors en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. La question précédente assure en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $v_n \geqslant 0$. Comme on sait de plus que $v_1 = 1$, tous les termes de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positifs. Autrement dit cette suite est minorée par 0. En tant que suite décroissante et minorée, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Comme pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, on est sûr que la limite de cette suite appartient à $[0\,;1]$.

Correction de l'exercice 182

1 • Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n^2}{n^2(n-1)} - \dfrac{n(n-1)}{n^2(n-1)} - \dfrac{n-1}{n^2(n-1)} = \dfrac{n^2 - n(n-1) - (n-1)}{n^2(n-1)} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

Le dernier quotient étant clairement positif, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

2 • Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. La question précédente assure que pour tout entier p compris entre 2 et n, $\dfrac{1}{p^2} \leqslant \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$. On effectue la somme de ces $n-1$ estimations et on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leqslant \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
\text{donc} \quad & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

en notant que le deuxième terme de chaque parenthèse du membre de gauche de l'estimation obtenue se simplifie avec le premier terme de la parenthèse suivante. On remarque alors que le membre de gauche de l'estimation est $u_n - 1$. Il suffit donc d'ajouter 1 de chaque coté de l'inégalité pour obtenir pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

3 • Comme $-1/n \leqslant 0$, la question précédente assure que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $u_n \leqslant 2$. Comme $u_1 = 1$, on a montré que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont plus petits que 2. Autrement dit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2. On note de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n+1}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante. En tant que suite croissante et majorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons pour conclure L la limite de cette suite. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2, $L \leqslant 2$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, L est plus grand que tout terme de cette suite donc en particulier que u_1 qui vaut 1. Finalement, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient bien à $[1\,;2]$.

Correction de l'exercice 183

- Soit $k \in \mathcal{A}$. Par définition

$$\text{pour tout } p \in \mathcal{A},\ b_p = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{n-1} a_r \exp\left(\frac{2\mathrm{i}rp\pi}{n}\right).$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{n-1} a_r \exp\left(\frac{2\mathrm{i}rp\pi}{n}\right)\right) \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right)$$

On rappelle alors que l'on peut «entrer» ou «sortir» d'une somme tout facteur qui ne dépend pas de l'indice de la somme considérée, comme le stipule la formule [S2]. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r \exp\left(\frac{2\mathrm{i}rp\pi}{n}\right) \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r \exp\left(\frac{2\mathrm{i}p(r-k)\pi}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

en utilisant la formule [EC1] sur les exponentielles complexes. Le point clé de cet exercice est la possibilité que l'on a d'«échanger» les sommes. Pour vous convaincre que cet échange a un sens, écrivez explicitement tous les termes des sommes concernées dans le cas $n = 3$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_r \exp\left(\frac{2\mathrm{i}p(r-k)\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \left(a_r \sum_{p=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right)\right)^p\right)\end{aligned}$$

en exploitant une fois encore la formule [S1] et en utilisant la formule [EC4] sur les exponentielles complexes. Pour chaque valeur de r, la somme intérieure est une somme de termes d'une suite géométrique. Le problème est que la raison de cette suite dépend de r, k et n. Il va donc falloir distinguer plusieurs cas. Soit $r \in \mathcal{A}$.

- On suppose que $r = k$. Il s'ensuit que $\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right) = 1$ donc $a_r \sum_{p=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right)\right)^p = n\, a_k$
- On suppose que $r \neq k$. Par construction

$$\begin{array}{ll} & 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \text{donc} & -(n-1) \leqslant -k \leqslant 0 \\ \text{Or} & 0 \leqslant r \leqslant n-1 \\ \text{donc} & -(n-1) \leqslant r-k \leqslant n-1, \\ \text{donc} & -2\pi + \dfrac{2\pi}{n} \leqslant \dfrac{2(r-k)\pi}{n} \leqslant 2\pi - \dfrac{2\pi}{n}, \end{array}$$

  Comme $\frac{2\pi}{n} > 0$, on en déduit que le réel $\frac{2(r-k)\pi}{n}$ appartient à $]-2\pi\,;2\pi[$. Sachant de plus que ce réel est non nul, on sait que ce n'est pas le produit d'un entier par 2π. Le cours sur les exponentielles complexes assure alors que l'exponentielle du produit de ce réel par i ne vaut pas 1 et on peut appliquer la formule [S5]. Autrement dit

$$a_r \sum_{p=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right)\right)^p = a_r \frac{\left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right)\right)^n - 1}{\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right) - 1} = a_r \frac{\exp\left(2\mathrm{i}(r-k)\pi\right) - 1}{\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right) - 1} = 0$$

  En effet $2(r-k)\pi$ est un multiple entier de 2π donc l'exponentielle du produit de ce réel par i vaut 1.

Finalement la somme $\sum_{r=0}^{n-1} \left(a_r \sum_{p=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{2\mathrm{i}(r-k)\pi}{n}\right)\right)^p\right)$ est formée d'un terme qui vaut na_k et de $n-1$ termes nuls. Elle vaut donc na_k. On a donc bien montré que pour tout $k \in \mathcal{A}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right) = a_k$$

Correction de l'exercice 184

1. En utilisant la technique présentée dans le corrigé de l'exercice 8 pour développer le cube de la somme de deux nombres, on vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 3x^2.\\
\text{et }&\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 30x^4 - 60x^3 + 36x^2 - 6x.\\
\text{et }&\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ g(x) = 120x^3 - 180x^2 + 72x - 6.
\end{aligned}$$

2. Tous les coefficients de la fonction polynomiale g sont divisibles par 6. On doit donc résoudre l'équation

$$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0,$$

d'inconnue réelle x. On note que $1/2$ est une solution de l'équation. L'indication proposée assure donc qu'il existe trois réels trois a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = (2x-1)(ax^2 + bx + c)$. En effectuant un développement «de tête» de l'expression de droite dans l'identité précédente et en considérant le terme en x^3 et le terme constant de ce développement, on note que nécessairement $a = 10$ et $c = 1$. On sait à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = (2x-1)(10x^2 + bx + 1)$. On calcule alors «de tête» le terme en x du même développement et on note que $2 - b = 12$ soit $b = -10$. Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = (2x-1)(10x^2 - 10x + 1)$. Il est alors facile de déterminer les solutions de l'équation initiale en cherchant les solutions de l'équation $10x^2 - 10x + 1 = 0$ d'inconnue réelle x. Finalement, les solutions de l'équation étudiées sont

$$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}},\ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}\right\}$$

Correction de l'exercice 185

1. Pour être efficace dans les calculs, il vaut mieux écrire f sous la forme d'une puissance et d'appliquer la formule [D5] du cours en utilisant comme fonction u la fonction $x \mapsto x + a$. On note ainsi que

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ f^{(1)}(x) = -(x+a)^{-2} = -\frac{1}{(x+a)^2}\\
\text{et }&\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ f^{(2)}(x) = 2(x+a)^{-3} = \frac{2}{(x+a)^3}\\
\text{et }&\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ f^{(3)}(x) = -6(x+a)^{-4} = -\frac{6}{(x+a)^4}\\
\text{et }&\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ f^{(4)}(x) = 24(x+a)^{-5} = \frac{24}{(x+a)^4}
\end{aligned}$$

En observant les premiers résultats, il est naturel d'introduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de **récurrence**

$$H_p: \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p)}{(x+a)^{p+1}}$$

On a déjà vérifié la véracité de H_1. Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que H_p soit vraie. On sait donc que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f^{(p)}(x) = (-1)^p(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p)(x+a)^{-(p+1)}$. Notez que l'on revient à une écriture de l'expression de f sous la forme d'une puissance pour optimiser le calcul de la dérivée. La dérivée de $f^{(p)}$ vérifie donc: pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$,

$$\begin{aligned}
f^{(p+1)}(x) &= \left(f^{(p)}\right)'(x)\\
&= (-1)^p(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p) \times (-(p+1)) \times (x+a)^{-(p+1)-1}\\
&= (-1)^{p+1}(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p \times (p+1))(x+a)^{-(p+2)}
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\},\ f^{(p+1)}(x) = \frac{(-1)^{p+1}(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (p+1))}{(x+a)^{p+2}}$$

L'assertion H_{p+1} est donc vraie. Le principe de récurrence permet donc de valider notre conjecture, à savoir que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$,

$$f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p)}{(x+a)^{p+1}}$$

2. On se ramène à la question précédente en transformant l'expression de g à l'aide de la technique présentée dans le corrigé de la question 3 de l'exercice 3 et surtout le corrigé des deux premières questions de l'exercice 11 et de la deuxième question des exercices 38 et 47. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$,

$$g(x) = \frac{\frac{2}{3}(3x-2) + \frac{13}{3}}{3x-2} = \frac{2}{3} + \frac{13}{3(3x-2)} = \frac{2}{3} + \frac{13}{9} \times \frac{1}{x - \frac{2}{3}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la dérivée d'une fonction constante est nulle, les formules [D1] et [D2] assurent que pour dériver k fois g, il suffit de dériver k fois la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-2/3}$, ce que la question précédente permet de faire. Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$,

$$g^{(k)}(x) = \frac{13(-1)^k(1 \times 2 \times \cdots \times k)}{9\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^{k+1}}$$

Correction de l'exercice 186

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. En notant que la dérivée d'une primitive d'une fonction u est la fonction u elle-même, on calcule

$$\begin{array}{ll} & U'(x) = A'(x)\mathrm{e}^{A(x)}f(x) + \mathrm{e}^{A(x)}f'(x) - B'(x). \\ \text{Or} & A'(x) = a(x),\ B'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}b(x) \text{ et } f'(x) = -a(x)f(x) + b(x) \\ \text{donc} & U'(x) = a(x)\mathrm{e}^{A(x)}f(x) + \mathrm{e}^{A(x)}\big(-a(x)f(x) + b(x)\big) - \mathrm{e}^{A(x)}b(x). \\ \text{donc} & U'(x) = 0 \end{array}$$

comme l'assure un simple développement.

2. Comme U est définie sur un intervalle et comme sa dérivée ne prend que la valeur 0, le cours assure que U est constante. Il existe donc un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $U(x) = K$. Soit alors $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Par construction de U,

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{e}^{A(x)}f(x) - B(x) = K. \\ \text{donc} & f(x) = \big(B(x) + K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}. \end{array}$$

en utilisant la propriété [ER2].

3. La fonction g est clairement dérivable en tant que somme et produit de fonctions qui le sont. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\begin{array}{ll} & g'(x) = B'(x)\mathrm{e}^{-A(x)} - A'(x)\big(B(x) + K\big)\mathrm{e}^{-A(x)} \\ \text{donc} & g'(x) = b(x)\mathrm{e}^{A(x)}\mathrm{e}^{-A(x)} - a(x)\big(B(x) + K\big)\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}$$

en utilisant une fois encore le fait que A et B sont des primitives respectives de a et $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$. En utilisant une fois encore la relation [ER2] et l'expression explicite de g, on en déduit que

$$\begin{array}{ll} & g'(x) = b(x) - a(x)g(x) \\ \text{donc} & g'(x) + a(x)g(x) = b(x) \end{array}$$

Finalement la fonction g est une solution du problème posé.

4. On cherche les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $f'(x) - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)f(x) = \mathrm{e}^x$. En suivant le plan proposé, on est donc amené à introduire les fonctions $a : x \mapsto -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et $b : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Une primitive A de a est la fonction $x \mapsto -x - \ln(x)$. On note alors que

$$\begin{array}{l} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathrm{e}^{A(x)} = \mathrm{e}^{-x-\ln(x)} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \\ \text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*},\ b(x)\mathrm{e}^{A(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Une primitive de $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$ est donc $x \mapsto \ln(x)$. On peut finalement appliquer la formule démontrée dans les trois premières questions. L'ensemble des fonctions cherché est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(\ln(x) + K\big)x\mathrm{e}^x \end{array},\ K \in \mathbb{R} \right\}$$

Lexique

Condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante

Une assertion logique est une phrase mathématique vraie ou fausse, qui peut dépendre de variables. Si A et B sont deux assertions logiques telles que la véracité de A entraîne celle de B, on dit que

- B est une condition nécessaire pour A.
- A est une condition suffisante pour B.

Considérons par exemple les assertions suivantes, dépendant de trois variables réelles x et y.

$$\text{(A)} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \text{(B)} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \qquad \text{(C)} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases},$$

Si l'assertion (A) est vraie alors (B) l'est. Autrement dit (A) est une condition suffisante pour (B) et (B) est une condition nécessaire pour (A). Mais si $x = -3$, $y = 2$ et $z = 1$ alors les relations de (B) sont vraies et celles de (A) sont fausses. Autrement dit lorsque (B) est vraie, (A) ne l'est pas forcément. L'assertion (A) n'est donc pas une condition nécessaire pour (B).

De manière analogue, si l'assertion (B) est vraie alors (C) l'est; il suffit d'ajouter les deux relations de (B) pour trouver la deuxième relation de (C). L'assertion (B) est donc une condition suffisante pour (C). De plus lorsque (C) est vraie, (B) l'est; il suffit de soustraire la première relation de (C) à la deuxième pour trouver la deuxième relation de (B). L'assertion (B) est donc une condition nécessaire pour (C). On dit alors que (B) est une condition nécessaire et suffisante pour (C), ou que les assertions (B) et (C) sont équivalentes.

On revient au cas général de deux assertions (A) et (B).

- Pour montrer que A est une condition nécessaire pour B, on suppose que (A) est vraie et on essaye d'en déduire (B); on dit que l'on raisonne par conditions nécessaires. Montrons par exemple que pour tout $x \in [-3/2\,;+\infty[$, si $\sqrt{2x+3} - x = 0$ alors $x = 3$ ou $x = -1$. Autrement dit, montrons que lorsque x est un réel plus grand que $-3/2$, l'assertion $x \in \{-1, 3\}$ est une condition nécessaire pour que $\sqrt{2x+3} - x = 0$. Soit donc $x \in [-3/2\,;+\infty[$ tel que $\sqrt{2x+3} - x = 0$.

  $$\begin{array}{ll} & \sqrt{2x+3} = x \\ \text{donc} & \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = x^2 \\ \text{donc} & 2x + 3 = x^2 \\ \text{donc} & x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}$$

  On note que -1 est un point d'annulation de la fonction $x \mapsto x^2 - 2x - 3$, ce qui permet de trouver l'autre point d'annulation de cette fonction de manière classique. Finalement, on déduit de notre contrainte sur x que $x \in \{-1, 3\}$. Notez pour conclure que l'assertion $x \in \{-1, 3\}$ n'est pas une condition suffisante pour que $\sqrt{2x+3} - x = 0$ puisque $\sqrt{2 \times (-1) + 3} - (-1) = 2$.
- Pour montrer que A et B sont équivalentes, on peut travailler en deux temps en suivant le plan de preuve du point précédent: on montre que (A) est une condition nécessaire pour (B) puis que (B) est une condition nécessaire pour (A). On peut aussi travailler par équivalences ou par conditions nécessaires et suffisantes, c'est à dire montrer que (A) et (B) ont la même valeur logique pour tous les jeux de variables possibles. Ce genre de preuve est beaucoup plus délicat car on manipule alors des assertions logiques de valeurs inconnues; on travaillera ce problème de manière approfondie en sup.

Une équation (E) est une assertion dépendant d'une ou plusieurs variables appartenant à un domaine fixé D, vraie lorsque ces variables prennent des valeurs précises inconnues à priori; ces variables sont appelées les inconnues. Les solutions d'une équation sont les valeurs que peuvent prendre les inconnues pour que l'égalité considérée soit vraie. Résoudre une équation consiste à trouver toutes ses solutions, c'est à dire à déterminer une partie S de D telle que l'assertion «$x \in S$» soit une condition nécessaire et suffisante pour que l'assertion (E) soit vraie en x. Lorsque l'on ne veut ou ne peut pas résoudre une équation par équivalences, on peut chercher une condition nécessaire sur l'inconnue pour qu'elle soit solution, puis faire une réciproque. Considérons par exemple l'équation

$$(E)\ \sqrt{2x+3} - x = 0,$$

d'inconnue $x \in [-3/2\,;+\infty[$ dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions. On a vérifié que tout élément de $\mathcal{S}$ appartient forcément à $\{-1, 3\}$, autrement dit que $\mathcal{S} \subset \{-1, 3\}$. Pour conclure il suffit de tester les solutions potentielles trouvée, à savoir -1 et 3. On a déjà noté que -1 ne vérifie pas l'équation (E). En revanche $\sqrt{2 \times 3 + 3} - 3 = 0$ donc 3 est une solution de (E). Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{3\}$.

Division euclidienne

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times Z^*$. On peut montrer qu'il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant |b| - 1$. On dit qu'on a effectué la division euclidienne du dividende a par le diviseur b pour obtenir le quotient q et le reste r. Notez que dans ce cadre a et r sont en relation pour la congruence modulo b. Donc une fois fixé un entier naturel n non nul, tout entier a est congru à un unique entier appartenant à $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ modulo n, à savoir le reste de la division euclidienne de a par n. Fixons par exemple $n = 7$. Comme $74 = 7 \times 10 + 4$ on sait que $74 \equiv 4\,[7]$. Comme $-58 = 7 \times (-9) + 5$ on sait que $-58 \equiv 5\,[7]$.

Expression algébrique

Une expression algébrique est une expression construite à partir de nombres et de variables en n'utilisant que des additions et des produits. C'est donc une **expression polynomiale** en toutes ses variables.

Expression polynomiale

Une expression polynomiale en une variable x est une expression obtenue en n'effectuant que les sommes et des produits de x et d'objets indépendants de x. Par exemple, si x est un réel, $3(x+1)^2 - 4x$ est une expression polynomiale en x, alors que $x - 4x^2 \sin(x)$ n'en est pas une à cause de la présence de $\sin(x)$. Il faut prendre garde que la notion d'expression polynomiale est relative à une variable. Par exemple si x, y et z sont trois complexes, l'expression

$$\frac{x^2 y + 2z(x+y)}{z+4} - \frac{xy}{z} - 7x^4$$

est polynomiale en x et en y mais pas en z. La notion d'expression polynomiale est en fait très formelle; on ne s'intéresse pas réellement à la nature de la variable relativement à laquelle on regarde si l'expression étudiée est polynomiale, mais plutôt aux opérations effectuées avec cette variable. Vous rencontrez donc aussi la notion d'expression polynomiale en un objet. Par exemple, si x est un complexe, l'expression

$$7x^6 - 4x^4 + 3$$

est polynomiale en x mais aussi «en x^2». Cela signifie que si on substitue une lettre y à x^2, on obtient une expression construite à l'aide de sommes et de produits de y et d'objets indépendants de y, à savoir $7y^3 - 4y^2 + 3$. De manière analogue, si x est un réel, l'expression

$$3\big(\sin(x)\big)^4 - \sin(x)\big(5\sin(x) + 4\big)$$

est polynomiale «en $\sin(x)$». Cela signifie que si on substitue une lettre y à $\sin(x)$, on obtient une expression construite à l'aide de sommes et de produits de y et d'objets indépendants de y, à savoir $3y^4 - y(5y+4)$.

Expression rationnelle

Une expression rationnelle en une variable x est une expression obtenue en n'effectuant que les sommes, des produits et des quotients de x et d'objets indépendants de x. Par exemple, si x est un réel, $\dfrac{3(x+1)^2}{4x^2+1}$ est une expression rationnelle en x, alors que $x - 4x^2 \sin(x)$ n'en est pas une à cause de la présence de $\sin(x)$. Il faut prendre garde que la notion d'expression rationnelle est relative à une variable. Par exemple si x, y et z sont trois réels, l'expression

$$\frac{x^2 \sin(y) + 2xz}{3x^3 y + z^2 + 1}$$

est rationnelle en x et en z mais pas en y. La notion d'expression rationnelle est en fait très formelle; on ne s'intéresse pas réellement à la nature de la variable relativement à laquelle on regarde si l'expression étudiée est rationnelle, mais plutôt aux opérations effectuées avec cette variable. Vous rencontrez donc aussi la notion d'expression rationnelle en un objet. Par exemple, si x est un réel, l'expression

$$\frac{3\big(\mathrm{e}^x + 1\big)^4}{\mathrm{e}^{2x} + 1} - 4\mathrm{e}^x$$

est polynomiale «en e^x». Cela signifie que si on substitue une lettre y à e^x, on obtient une expression construite à l'aide de sommes, de produits et de quotients de y et d'objets indépendants de y, à savoir $\dfrac{3(y+1)^4}{y^2+1} - 4y$.

Identification

Certain objets mathématiques sont uniquement définis. Lorsque l'on dispose de deux expressions pour ce type d'objet, on sait que ces deux expressions sont les mêmes. Faire une identification consiste alors à écrire l'égalité entre les deux expressions. On peut par exemple montrer que les coefficients d'une expression polynomiale écrite sous forme développée sont uniques. Donc si on trouve deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(a+1)x^2 + (a+b)x = 4x^2 + 5x$, on peut identifier les coefficients de ces expressions développées et écrire que $a + 1 = 4$ et $a + b = 5$; Autrement dit, on est sûr que $a = 3$ et $b = 2$.

Récurrence

Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à m, on introduit une assertion logique H_n, c'est à dire une phrase mathématique pouvant être vraie ou fausse, dépendant de n. On démontre que si

(1) L'assertion H_m est vraie,

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et H_n est vraie, l'assertion H_{n+1} est vraie,

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$, l'assertion H_n est vrai. Cela semble intuitif: H_m est vraie par hypothèse. On applique alors la contrainte (2), qui assure que H_{m+1} est vraie. On applique encore la contrainte (2), qui assure que H_{m+2} est vraie... et on continue ainsi. Nous verrons en sup que cette idée n'est pas du tout intuitive et a posé d'énormes problème tant mathématiques que philosophique. Ceci étant, elle est valide et est la source du raisonnement par récurrence. pour montrer que toutes les assertions de la famille $(H_n)_{n \geqslant m}$ sont vraies, on vérifie les contraintes (1) et (2). Une récurrence de base se fait donc en quatre étapes, en suivant le schéma ci-dessous dans lequel le symbole « ... » remplace les preuves adaptées aux assertions manipulées, qui sont représentées par un trait gras.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$, on pose H_n : ▬▬	*Introduction de la famille d'assertions*
$\cdots$ donc H_m est vraie.	*Initialisation*
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et H_n soit vraie.	*Hérédité*
$\vdots$	
Donc H_{n+1} est vraie.	
Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$, H_n est vraie.	*Conclusion*

Suite géométrique

Soit a un complexe non nul et b un complexe. On appelle suite géométrique de premier terme b et de raison a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = b$ et par la relation de récurrence: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n$. On démontre que cette suite est $\left(b \times a^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.